

תרגיל 5-פתרון

מבני נתונים ואלגוריתמים

.1

במקרה הממוצע: נבחר בכל פעם איבר ציר אקראי (לכל איבר יש סיכוי $\frac{1}{n}$ להיבחר) ונחסום מלמעלה ע"י כך שתמיד נבחרת תת-הרשימה הארוכה ביותר:

$$T(n) \leq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^n T(\max(k-1, n-k)) \right) + O(n)$$

• $O(n)$ זמן עבודה עבור החלוקה ל-2 רשימות.

x.

אורך תת הרשימה הארוכה ביותר עבור כל k שנבחר מתפלג בין $[n/2, n-1]$ לכן נקבל:

$$T(n) \leq \frac{1}{n} \left(2 \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} T(k) \right) + O(n)$$

• אם n זוגי, אז כל אורך של קטע הכי ארוך מופיע פעמיים (לדוגמא אם $n=6$ אז כאשר $k=2$ וגם כאשר $k=5$ אורך הקטע הארוך יותר הוא 4). אם n אי-זוגי, כולם יופיעו פעמיים פרט לאחד מהם.

נראה ש- $T(n) = O(n)$ באינדוקציה:

הוכחה: צריך למצוא c כך שמתקיים $T(n) \leq cn$. נניח שזה מתקיים עבור c קבוע מסוים המקיים את תנאי ההתחלה של הנוסחה. נשתמש בהנחת האינדוקציה ונקבל:

$$\begin{aligned} T(n) &\leq \frac{2}{n} \sum_{k=\lceil n/2 \rceil}^{n-1} ck + dn \\ &= \frac{2c}{n} \left(\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{\lceil n/2 \rceil - 1} k \right) + dn \\ &= \frac{2c}{n} \left(\frac{1}{2}(n-1)n - \frac{1}{2} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \frac{n}{2} \right) + dn \\ &\leq c(n-1) - \frac{c}{n} \left(\frac{n}{2} - 1 \right) \left(\frac{n}{2} \right) + dn \\ &= c \left(\frac{3}{4}n - \frac{1}{2} \right) + dn \\ &\leq cn \end{aligned}$$

נבחר $c \geq 4d$ כך ש- $\frac{3}{4}n - \frac{1}{2}$ יהיה דומיננטי יותר מאשר $O(n)$.

.2

- הרעיון: נמיין את תאריכי הלידה והפטירה ביחד תוך כדי שמירה על הנתון לידה/פטירה.
- לכל זוג (a_i, b_i) מגדיר 2 זוגות מספרים: $(a_i, 1)$, $(b_i, -1)$ (1 מציין לידה ו-1 מציין פטירה).
 - נמיין לפי הקואורדינטה הראשונה ואז לפי השנייה * $O(n \log n) = 2O(n \log n)$
 - כעת נעבור על הרשימה הממוינת לפי האלגוריתם הבא: $O(n)$

```

max = 0
count = 0
for each pair  $(x_i, y_i)$  in sorted list:
    count += y_i
    max = max(max, count)
return max

```

$count$ – כמה חיים ביחד כרגע, max – הערך המקסימלי שחיו ביחד עד עכשיו

דוגמת ריצה:

הזוגות:

$(1,5), (2,3), (2,10), (3,10), (4,7)$

הזוגות החדשים ממוינים:

$(1,1) (2,1), (2,1) (3,1) (3,-1) (4,1) (5,-1) (7,-1) (10,-1) (10,-1)$

הלולאה:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Count	1	2	3	2	3	4	5	2	1	0
Max	1	2	3	3	3	4	4	4	4	4

- הלטאות שחיו בו-זמנית הם: $(1,5), (2,10), (3,10), (4,7)$.
סיבוכיות: $O(n \log n) + O(n) = O(n \log n)$

.3

נוכיח שקן – נניח בשלילה כי קיים עפ"מ T' כך ש- $\sum_{e \in T'} w'(e) < \sum_{e \in T} w'(e)$. מספר הקשתות ב- T וב- T' הוא בדיוק $|V|-1$. לכן:

$$\sum_{e \in T'} w(e) + c(|V| - 1) = \sum_{e \in T'} w'(e) < \sum_{e \in T} w'(e) = \sum_{e \in T} w(e) + c(|V| - 1)$$

לכן:

$$\sum_{e \in T'} w(e) < \sum_{e \in T} w(e)$$

וזו סתירה לכן ש- T הוא עפ"מ לפי w .