תרגיל 8 טופולוגיה

בכל התרגיל אתם מתבקשים לנמק את צעדיכם ככל האפשר.

1. (א) הוכיחו כי מרחב טופלוגי X הוא טריויאלי אם ורק אם יש לו בסיס בעל קבוצה אחת.

   (ב) יהי X מרחב דיסקרטי, הוכיחו כי קבוצה של קבוצות פתוחות (שזו בעצם סתם קבוצה של קבוצות) היא בסיס אם ורק אם היא מכילה את כל היחידונים (הקבוצות בגודל 1)

2. יהיו X,Y מרחבים טופולוגיים ו $f:X\to Y$ פונקציה. ניקח $\mathcal{B}$ להיות בסיס כלשהוא עבור Y. הוכיחו כי f רציפה אם ורק אם לכל $B\in\mathcal{B}$ $f^{-1}(B)$ היא קבוצה פתוחה.

3. יהיו (X,τ_X) ו (Y,τ_Y) מרחבים טופולוגיים. נסמן $\mathcal{B}=\tau_X\times\tau_Y$

   (א) הראו כי $(X\times Y,\mathcal{B})$ היא לא בהכרח טופולוגיה.

   (ב) הראו כי $\mathcal{B}$ הוא בסיס עבור טופולוגיה כלשהיא על $X\times Y$.

4. (א) יהי X מרחב טופולוגי B_2 (מרחב מנייה שניה). הוכיחו כי כל תת מרחב של X הוא גם מרחב B_2.

   (ב) ראינו כי תת מרחב של מרחב ספרבילי לא חייב להיות ספרבילי. הוכיחו כי אם X מרחב טופולוגי ספרבילי ו $Y\subseteq X$ היא קבוצה פתוחה אז Y מרחב ספרבילי.

5. יהי (X,τ) מרחב טופולוגי B_2, הוכיחו כי $|\tau|\leq\aleph=2^{\aleph_0}$.

6. יהי X מרחב טופולוגי B_1 כך ש X היא קבוצה בת מנייה. הוכיחו כי X הוא מרחב B_2.

7. יהי X מרחב מטרי חסום כליל. הוכיחו כי לכל סדרה ב X יש תת סדרה שהיא סדרת קושי.

8. תהי X קבוצה לא בת מניה עם טופולוגיה קו־מנייתית (cocountable). הוכיחו כי X אינה ספרבילית (זכרו שבתרגיל קודם הוכחתם שטופולוגיה זו גם לא B_1).

9. (א) יהי X מרחב B_2. הראו כי לכל כיסוי כלשהוא של קבוצות פתוחות יש תת כיסוי בן מניה. (תכונה זאת נקראת תכונת לינדולף).

   (ב) יהי X מרחב B_2. הראו שלכל בסיס $\mathcal{B}=\{B_i\}_{i\in I}$ יש תת קבוצה בת מניה שהיא גם בסיס. (העזרו בסעיף הקודם ובשאלה 4)