

# עוד שאלות על קבוצות סדורות היטב

## שאלה 1

תהי  $(X, \leq)$  קבוצה סדורה לינארית ויהיו  $x, y \in X$ . נאמר ש- $y$  הוא עוקב מידי של  $x$  אם  $x < y$  (כלומר  $x \leq y$  ו- $x \neq y$ ) ולכל  $z \in X$  כך ש- $z < x$  מתקיים  $y \leq z$ .

- תנו דוגמה לקס"ח  $(X, \leq)$  ואיבר  $x \in X$  לא מקסימלי כך של- $x$  אין עוקב מידי.
- הראו כי אם  $(X, \leq)$  סדורה היטב, אז לכל איבר לא מקסימלי ב- $X$  קיים עוקב מידי.
- יהי  $\leq$  יחס הסדר הרגיל על  $\mathbb{R}$  ותהי  $A \subseteq \mathbb{R}$ . הראו כי אם  $(A, \leq)$  סדורה היטב אז  $A$  בת מנייה. [רמז: העזרו בסעיף ב.]
- הוכיחו או הפריכו:
  - אם לכל איבר לא מקסימלי ב- $(X, \leq)$  קיים עוקב מידי אז  $X$  סדורה היטב.
  - $(*)$  אם לכל איבר לא מקסימלי ב- $(X, \leq)$  קיים עוקב מידי וב- $X$  יש איבר מינימלי, אז  $X$  סדורה היטב.

## שאלה 2

- תהי  $(A, \leq)$  קבוצה סדורה לינארית ותהיינה  $B, C \subseteq A$  כך ש- $B \cup C = A$ . הוכיחו כי  $(A, \leq)$  סדורה היטב אם ורק אם  $(B, \leq)$  סדורה היטב ו- $(C, \leq)$  סדורה היטב.
- תהי  $(A, \leq)$  קבוצה סדורה לינארית ותהי  $F \subseteq A$  תת קבוצה סופית. הוכיחו כי  $(A, \leq)$  סדורה היטב אם ורק אם  $(A \setminus F, \leq)$  סדורה היטב.