

שיעורי בית 4

1. ב \mathbb{R}^4 עם המכפלה הסקלארית נגדיר

$$W = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

מצאו בעזרת גרם שמידט בסיס אורתונורמלי ל W .

2. יהא $V = \mathbb{R}_2[x]$, נגדיר מכפלה פנימית על V כך:

$$\forall f, g \in V : \langle f, g \rangle = \sum_{i=0}^2 f(i)g(i)$$

(א) עבור $f(x) = x, g(x) = x^2 + 4x - 3$ חשבו את $\langle f, g \rangle$.

(ב) מצאו בסיס או"נ ל V .

3. תהא $D : \mathbb{R}_n[x] \rightarrow \mathbb{R}_n[x]$ העתקת הנגזרת (כלומר $p(x) \mapsto p'(x)$). מצאו את כל ת"מ ה $-D$ אינווראינטיים. [מותר להשתמש בעובדה כי אם $\{p_i(x)\}_{i=1}^m$ פולינומים מדרגות שונות (שונים מאפס) אזי הם בת"ל].

4. יהא \mathbb{R}^n עם המכפלה הסקלארית. ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס או"נ. נגדיר מטריצה $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ כך: עמודה j של המטריצה P הוא הוקטור v_j . כלומר

$$P = \begin{pmatrix} | & & | \\ v_1 & \cdots & v_n \\ | & & | \end{pmatrix}$$

(א) הוכיחו כי $P^t P = I$

(ב) הוכיחו $\det(P) \in \{\pm 1\}$

5. נגדיר $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2x + y + 3z$$

ונגדיר קבוצה $S = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1 \right\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : \|v\| = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (כאשר $\|v\|$ היא הנורמה המשורית מהמכפלה הסקלארית). מצאו

$$\max_{v \in S} f(v)$$

[רמז: אי שיויון קושי שוורץ, שימו לב כי $f(v) = \left\langle v, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$]

6. יהא V ממ"פ מעל \mathbb{R} (עם מ"פ $\langle v, v' \rangle$) ויהא $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס אור"נ הוכיחו כי לכל $v \in V$ מתקיים כי

$$\langle v, v \rangle = [v]_B^t \cdot [v]_B$$

7. יהא $(V, \langle \rangle)$ ממ"פ. ויהיו S, S_1, S_2 ת"ק של V .

(א) הוכיחו כי אם $S_1 \subseteq S_2$ אזי $S_1^\perp \subseteq S_2^\perp$.

(ב) הוכיחו כי $[span(S)]^\perp = S^\perp$