3. תהי $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4\times4}$.

א. האם היא ניתנת ללכסון / שילוש? הסבירו! לכסנו אם אפשר, אם לא - שלשו / או הסבירו מדוע לא ניתן לעשות זאת.

ב. מהי צורת ז'ורדן שלה?

$$f_A(x) = x^2(x-1)^2 \Rightarrow \text{שלישה} \Rightarrow \exists \underset{\text{הפיכה}}{P}, \underset{\text{משולשית}}{T} : A = PTP^{-1}$$

$x_{1,2} = 0:$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 1 = \text{ר"ג} \neq \text{ר"א} = 2 \Rightarrow \text{לא לכסינה}$$

$x_{3,4} = 1:$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3+R_4-R_2-R_1]{} \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow 1 = \text{ר"ג}$$

כלומר, קיימים מספיק ע"ע כדי לשלשה אך לא מספיק ו"ע כדי ללכסן אותה.
אם המטריצה שלישה ולא לכסינה אז צורת ג'ורדן שלה משולשית (לא אלכסונית). נמצא צורת ג'ורדן והיא תענה על שתי הדרישות.

לפי הפ"א ניתן לקבל את האלכסון:

$$\left(\begin{array}{cccc} 0 & & & \\ & 0 & & \\ \hdashline & & 1 & \\ & & & 1 \end{array}\right)$$

ר"ג של 0 הוא 1 <= בלוק יחיד של 0 <= הבלוק הוא 2X2:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & | & & \\ & - & & - & \\ & & | & 1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ר"ג של 1 הוא 1 <= בלוק יחיד של 1 <= הבלוק הוא 2X2:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & & \\ & 0 & | & & \\ - & - & & - & - \\ & & | & 1 & 1 \\ & & | & & 1 \end{pmatrix}$$ ובמקומות הריקים אפסים. אכן קיבלנו מטריצה משולשית לה דומה A.

(בלי קשר לשאלה ניתן להסיק $M_A(x) = f_A(x)$ בשל גודלם של הבלוקים המקסימליים של כל ע"ע).

4. אין קשר בין הסעיפים:

א. תהא $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. הוכיחו כי קיימות שתי מטריצות הפיכות $A_1, A_2 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ כך ש $A = A_1 + A_2$.

ב. תהי $B \in \mathbb{C}^{2\times 2}$ בעלת שני ע"ע $0 \neq \lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$. הראו שקיימות בדיוק 4 מטריצות שונות B_1, B_2, B_3, B_4 המקיימות $B_i^2 = B$.

א. תהי $\{\lambda_i\}$ קבוצת הע"ע של A. שימו לב, גודלה של קב' זו הוא מספר שלם בין 0 ל-n, תלוי בפריקותו של הפ"א.

אזי $|A - \lambda_i I| = 0 \quad \forall i$ ולכן

$A - \lambda_i I \quad \forall i$

לא הפיכה

אזי $|A - \lambda I| \neq 0 \quad \forall \lambda \neq \lambda_i \quad \forall i$ ולכן

$A - \lambda I \quad \forall \lambda \neq \lambda_i$

הפיכה

נבחר $\lambda \neq 0$ כך ש $\pm\lambda \neq \lambda_i \quad \forall i$, קיים כזה היות ו $\{\lambda_i\}$ קב' סופית ב-R.

נקבל $A = \frac{(A-\lambda I)}{2} + \frac{(A+\lambda I)}{2}$ כאשר $\frac{(A-\lambda I)}{2}, \frac{(A+\lambda I)}{2}$ הפיכות.

פתרון נוסף של הסטודנט נאור זעירא:

$A = (a_{ij})$

נגדיר

$$A_1 = (b_{ij}) : b_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i > j \\ 0, j > i \\ a_{ij}/2, \forall i = j : a_{ii} \neq 0 \\ 1, \forall i = j : a_{ii} = 0 \end{cases}, \qquad A_2 = (c_{ij}) : c_{ij} = \begin{cases} a_{ij}, i < j \\ 0, j < i \\ a_{ij}/2, \forall i = j : a_{ii} \neq 0 \\ -1, \forall i = j : a_{ii} = 0 \end{cases}$$

מטריצות אלו הן משולשיות בעלות אלכסון שונה מאפס, ולכן הן הפיכות.
ונקבל

$$A = A_1 + A_2 = (b_{ij}) + (c_{ij}) = (b_{ij} + c_{ij}) : \quad b_{ij} + c_{ij} = \begin{cases} a_{ij} + 0, i > j \\ 0 + a_{ij}, j > i \\ a_{ij}/2 + a_{ij}/2, \forall i = j : a_{ii} \neq 0 \\ 1 + (-1), \forall i = j : a_{ii} = 0 \end{cases} = a_{ij} \qquad \forall i, j$$

במילים: נפרק את A לחלקה המשולשי עליון+ חלקה המשולשי תחתון, כאשר את אלכסונה חולקות שתי המטריצות באופן שאיננו כולל אפסים (לכל מספר ממשי a, גם לאפס, קיימים שני מספרים ממשיים שאינם אפס אשר סכומם נותן את a).

ב. B מטריצה 2X2 עם שני ע"ע שונים <= B לכסינה:

$$B = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

$$\lambda \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} |\lambda| \neq -|\lambda| \\ \lambda \neq \overline{\lambda}, \lambda \in C \setminus R \end{cases}$$

כמו כן, אם נגדיר $\sqrt{D} = \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}$ אז

$$B = PDP^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \\ & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1} = P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}^2 P^{-1} = \left(P\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix}P^{-1}\right)^2$$

ולכן

$$B_i = \left\{ P \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & \\ & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} P^{-1} \right\}, \quad \sqrt{\lambda_j} \in \left\{ \begin{array}{c} \pm\sqrt{|\lambda_j|}, \lambda \in R \\ \pm(c+id): b = 2cd, a = c^2 - d^2, \lambda_j = a+ib \in C \setminus R \end{array} \right\}$$

.

סה"כ 2X2 אפשרויות.

5. הוכיחו /הפריכו : (אין קשר בין הסעיפים)

א. יהי V ממ"פ ממימד סופי אי זוגי n מעל $\mathbb{R}$. יהי B בסיס של V ו- G מטריצת גראם המתאימה לבסיס B. אזי אין בסיס אחר B' של V כך שמטריצת גראם המתאימה לבסיס B' היא $-G$.

ב. יהי V ממ"פ מעל $\mathbb{C}$ ויהיו $u, v \in V$ שעבורם $\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$. אזי בהכרח $u \perp v$.

א. הוכחה:

$$V = sp\{v_1,..., v_n\}$$

$$G = (< v_i, v_j >)$$

נניח שקיים בסיס $\{u_1,..., u_n\}$ כך ש-

$$G' = (< u_i, u_j >) = -G = -(< v_i, v_j >) = (-< v_i, v_j >) \Rightarrow$$

$$when \quad i = j: \quad < u_i, u_i >= -< v_i, v_i > \begin{cases} \le 0, & \text{כי} < v_i, v_i > \ge 0 \\ \ge 0, & \text{כי} < u_i, u_i > \ge 0 \end{cases} \Rightarrow < u_i, u_i >= 0 \Rightarrow u_i = 0$$

בסתירה לכך ש G' מייצגת בסיס.

ב. הפרכה:

לדוגמא כש-

$$u = 1 + 2i$$

$$v = 2 - i$$

אכן מתקיים

$$< u+v, u+v >=< 3+i, 3+i >= 9 + 1 = 10$$

$$< u, u > + < v, v >= 1 + 4 + 4 + 1 = 10$$

אבל

$$< u, v >=< 1+2i, 2-i >= (1+2i)(2+i) = 2 - 2 + i(1+4) = 5i$$

ולכן הם לא מאונכים.

6. יהי V ממ"פ ממימד סופי עם בסיס $B=\{v_1,\dots,v_n\}$ ובבסיס דואלי $B^*=\{f_1,\dots,f_n\}$. הוכיחו :

א. לכל וקטור $v\in V$ מתקיים : $[v]_B=\begin{pmatrix} f_1(v)\\ \vdots \\ f_n(v)\end{pmatrix}$

ב. לכל פונקציונאל $f\in V^*$ מתקיים $[f]_{B^*}=\begin{pmatrix} f(v_1)\\ \vdots \\ f(v_n)\end{pmatrix}$

א.

$$\forall v\ \forall i \quad f_i(v)=f_i(\sum \alpha_j v_j)=\sum \alpha_j f_i(v_j)=\alpha_i \Rightarrow [v]_B=(\alpha_1 \quad ,..., \quad \alpha_n)=(f_1(v) \quad ,..., \quad f_n(v))$$

ב.

$$\forall f\ \forall i \quad f(v_i)=\sum \beta_j f_j(v_i)=\beta_i \Rightarrow [f]_{B^*}=(\beta_1 \quad ,..., \quad \beta_n)=(f(v_1) \quad ,..., \quad f(v_n))$$

7. הוכיחו :

א. תהי $A\in\mathbb{C}^{n\times n}$ הרמיטית. אזי $\ker A=\ker A^2$.

ב. תהי $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$. אם A אורתונורמלית אזי גם $adj(A)$ אורתונורמלית.

א.

$$A = A^*$$

$$\subseteq:\ Av=0 \Rightarrow A^2v=AAv=A\cdot 0=0$$

$$\supseteq:\ A^2v=0 \Rightarrow <Av,Av>=<A^*Av,v>=<A^2v,v>=<0,v>=0 \Rightarrow Av=0$$

ב.

$$\underset{\text{בפרט } A \text{ הפיכה ו-} A^{-1}=A^t}{AA^t=I} \Rightarrow |A|=|A^t|=|A^{-1}|=|A|^{-1}$$

$$adjA=|A|A^{-1}=|A|A^t \Rightarrow (adjA)^t=|A|A=|A|^{-1}A \Rightarrow (adjA)(adjA)^t=|A||A|^{-1}AA^{-1}=I$$