<u>אנליזה מודרנית – פתרון תרגיל בית 1</u>

1. בהרצאה נלמד כי המידה החיצונית של לבג היא שמורה תחת הזזה ולכן נניח כי $b=0$, ויש להוכיח $m^*(aE)=|a|m^*(E)$. כמו כן, ניתן להוכיח בקלות שלכל קטע $I\subseteq\mathbb{R}$ מתקיים $|aI|=|a||I|$

המקרה בו $a=0$ ברור, שכן הקבוצה $aE=\{0\}$ היא נקודון, ומידתה החיצונית 0. אחרת, אם $a\neq 0$ קל לראות כי ההעתקה $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}\mapsto\{aI_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא חח"ע ועל מקבוצת הכיסויים של E אל קבוצת הכיסויים של aE. כלומר $E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\Leftrightarrow aE\subseteq a\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(aI_n)$ וכל כיסוי $\{J_n\}_{n=1}^{\infty}$ של aE ניתן לרשום בצורה $\{aI_n\}_{n=1}^{\infty}$ כאשר $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ מכסים את E. ובכן:

$$|a|m^*(E)=|a|\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|:E\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\right\}=|a|\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|:aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n\right\}=\inf\left\{|a|\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|:aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n\right\}$$

$$=\inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty}|aI_n|:aE\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}aI_n\right\}=m^*(aE)$$

.2

א. נראה הכלה דו כיוונית:

$\subseteq$:

לכל n מתקיים $E_n\subseteq\overline{E_n}$. נאחד את ההכלות לקבל $\bigcup_{n=1}^{N}E_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}\overline{E_n}$. ניקח סגור לשני האגפים $\overline{\bigcup_{n=1}^{N}E_n}\subseteq\overline{\bigcup_{n=1}^{N}\overline{E_n}}=\bigcup_{n=1}^{N}\overline{E_n}$ (השוויון האחרון מתקיים כי $\bigcup_{n=1}^{N}\overline{E_n}$ סגורה כאיחוד סופי של סגורות)

$\supseteq$:

לכל n מתקיים $E_n\subseteq\bigcup_{n=1}^{N}E_n$. ניקח סגור לקבל $\overline{E_n}\subseteq\overline{\bigcup_{n=1}^{N}E_n}$ נאחד את ההכלות לקבל $\bigcup_{n=1}^{N}\overline{E_n}\subseteq\overline{\bigcup_{n=1}^{N}E_n}$.

ב. נגדיר $E_n=\left\{\frac{1}{n}\right\}$. אזי $\bigcup_{n=1}^{\infty}\overline{E_n}=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}$, ואילו $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n}=\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{n}\right\}\right)\cup\{0\}$.

3. אם $m^*(E)=\infty$ הקבוצה הפתוחה $O:=\mathbb{R}$ עונה על הדרישות, ולכן נותר לטפל במקרה בו $m^*(E)<\infty$. נוכיח זאת בעזרת ההדרכה:

א. יהי $\varepsilon > 0$. ע"פ הגדרת $m^*(E)$ ישנו כיסוי של E ע"י קטעים פתוחים $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ כך ש
$m^*(E) \le \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \le m^*(E) + \varepsilon$. הקבוצה הפתוחה $O := \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$ מקיימת $E \subseteq O$ וכן
$m^*(O) = m^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \overset{\sigma-subadditivity}{\le} \sum_{n=1}^{\infty} m^*(I_n) \le m^*(E) + \varepsilon$.

ב. ע"פ א' לכל $n \in \mathbb{N}$ נוכל למצוא קבוצה פתוחה $O_n \supseteq E$ המקיימת $m^*(O_n) \le m^*(E) + \frac{1}{n}$.
נגדיר $G = \bigcap_{n=1}^{\infty} O_n \in G_\delta$. מתקיים $E \subseteq G$ (ולכן ממונוטוניות m^*, $m^*(E) \le m^*(G)$), וכן
לכל n $m^*(G) \le m^*(O_n) \le m^*(E) + \frac{1}{n}$ (ע"פ מונוטוניות m^*) נשאיף $n \to \infty$ לקבל
$m^*(G) \le m^*(E)$. בסה"כ הראינו כי $m^*(G) = m^*(E)$.