

3.23 א.  $\Leftarrow$  מהתירגול

$\Rightarrow$  T נורמלית אז T לכסינה ונתון שהע"ע ממשיים. מההרצאה זה אומר שהנורמליות גוררת צל"ע.

ב.  $\Leftarrow$  T אוניטרית אזי

$$\lambda^2 \langle v, v \rangle = \langle \lambda v, \lambda v \rangle = \langle Tv, Tv \rangle = \langle T^*Tv, v \rangle = \langle v, v \rangle$$

$\Downarrow$

$$|\lambda| = 1$$

$$\Rightarrow T \text{ נורמלית אזי } T \text{ לכסינה אזי } T \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

$$T^* \approx \begin{pmatrix} \overline{\lambda_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ & & & \overline{\lambda_n} \end{pmatrix}$$

$\Downarrow$

$$TT^* \approx I$$

$\Downarrow$

$$TT^* = I$$

3.24:

$$T = -i(F - I)(F + I)^{-1} \text{ טענה:}$$

הוכחה:

מב':

$$F = (I + i(-i(F - I)(F + I)^{-1}))(I - i(-i(F - I)(F + I)^{-1}))^{-1}$$

$$F = (I + (F - I)(F + I)^{-1})(I - (F - I)(F + I)^{-1})^{-1}$$

$$(I - (F - I)(F + I)^{-1})F = (I + (F - I)(F + I)^{-1})$$

$$FI - I = F - I \quad \text{true}$$

3.27:

$$T \approx \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix} = D : C \text{ אזי } TT^* = T^*T \text{ לכסינה אורתוגונלית מעל } C$$

$$\lambda_j = \rho_j e^{i\theta_j} \text{ נזכיר ש}$$

לכן:

$$D = \begin{pmatrix} \rho_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \rho_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{i\theta_n} \end{pmatrix}$$

3.30:

א. כיוון שני

$\Rightarrow$ :

$$\|Tv\|^2 = \langle T^*Tv, v \rangle = \sum \alpha_i^2 \lambda_i^2 \langle v_i, v_i \rangle \leq \sum \alpha_i^2 \langle v_i, v_i \rangle = \langle v, v \rangle = \|v\|^2$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ ב.}$$

מבחן 2006- מועד ב:

$$\subseteq: Av = 0 \Rightarrow A^2v = AA v = A \cdot 0 = 0$$

$$\supseteq: \langle Av, Av \rangle = \langle A^* Av, v \rangle = \langle A^2v, v \rangle = \langle 0, v \rangle = 0 \quad \text{א.}$$

$$A \text{adj} A = |A| I$$

$$\text{adj} A = |A| A^{-1} \quad \text{ב.}$$

A א"ג אזי ההופכי שלו א"ג ולכן ה adj א"ג

שאלה שהופיעה כבנוס באותו מבחן:

לא. למשל:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$