מרחבי הסתברות בדידים

מרחב הסתברות בדיד הוא זוג (Ω, P), כך ש:

Ω - קבוצה סופית או בת מניה.

$P\colon \Omega \to \mathbb{R}$ - פונקציה המקיימת:

$$0 \le P(x) \quad , \quad \sum_{x\in\Omega} P(x) = 1$$

נרחיב את P: נגדיר $P\colon \mathbb{P}(\Omega) \to \mathbb{R}$, לפי:

$$P(A) = \sum_{x\in A} P(x)$$

כך שלכל מאורע $A \subseteq \Omega$ קיימת הסתברות $P(A)$.

תכונות (נובעות מהאקסיומות)

1. $$\boxed{P(\Omega) = 1}$$
2. $$\boxed{P(A \cup B) = P(A) + P(B)}$$
3. אם $A_1, A_2, \cdots \subseteq \Omega$ זרים בזוגות, אז:
$$\boxed{P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)}$$

דוגמה

תהי קבוצה סופית Ω בגודל $|\Omega| = n$.

ניתן להחליט כי:

$$\forall x \in \Omega : P(x) = \frac{1}{n}$$

זהו מרחב הסתברות אחיד.

הכללה

תהי $f\colon \Omega \to \Omega_1$ פונקציה על בין קבוצות סופיות.

נניח כי $P\colon \Omega \to \mathbb{R}$ פונקציית הסתברות אחידה.

נגדיר $P_1\colon \Omega_1 \to \mathbb{R}$ לפי:

$$P_1(x) = \frac{|f^{-1}(x)|}{|\Omega|}$$

דוגמה

מטילים מטבע n פעמים. סופרים כמה פעמים יצא 1.

$$\Omega = \{(0,0,\cdots,0,0),(0,0,\cdots 0,1),\cdots,(0,1,\cdots,1,1),(1,1,\cdots,1,1)\}\,,|\Omega| = 2^n$$

נגדיר $\Omega_1 = \{0,1,\cdots,n\}$, ונגדיר $f:\Omega \to \Omega_1$, לפי ספירת ה 1-ים בסדרה.

למשל:

$$f(0,1,0,0,1,00) = 2$$

לכן, לכל $k \in \Omega_1$:

$$P_1(k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

■

נוסחת ההכלה וההדחה בהסתברויות

נוסחת ההכלה וההדחה בקבוצות, ראה הרצאה 3.

עפ"י האקסיומות:

$$P(A\cup B)=P(A)-P(B)-P(A\cap B)$$

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-P(B\cap C)+P(A\cap B\cap C)$$

באופן כללי:

$$\boxed{P(A_1\cup\cdots\cup A_n)=\sum_{\phi\neq I\subseteq\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|-1}\cdot P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)}$$

דוגמה

מפזרים n מכתבים ב - n מעטפות.

שאלה: מה הסיכוי שאף מכתב לא יגיע ליעדו?

פתרון: נפתור בעזרת נוסחת ההכלה וההדחה.

נסמן ב - A_i את המאורע = {מכתב מספר i מגיע ליעדו}.

$A_1\cup\cdots\cup A_n$ הוא המאורע = {לפחות אחת מהמכתבים הגיע ליעד}.

$(A_1\cup\cdots\cup A_n)^c$ הוא המאורע = {אף מכתב לא הגיע ליעד}.

$$\boxed{P((A_1\cup\cdots\cup A_n)^c)=?}$$

עפ"י נוסחת ההכלה וההדחה:

$$P((A_1\cup\cdots\cup A_n)^c)=\sum_{I\subseteq\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|}\cdot P\left(\bigcap_{i\in I}A_i\right)$$

$$P((A_1\cup\cdots\cup A_n)^c)=\sum_{I\subseteq\{1,\cdots,n\}}(-1)^{|I|}\cdot\frac{(n-|I|)!}{n!}$$

זהו מצב סימטרי, לכן:

$$P((A_1\cup\cdots\cup A_n)^c)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\sum_{\substack{I\subseteq\{1,\cdots,n\}\\|I|=k}}\frac{(n-k)!}{n!}=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!}\longrightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\cdot\frac{1}{k!}=\frac{1}{e}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P((A_1\cup\cdots\cup A_n)^c)=\frac{1}{e}}$$

מוטיבציה

מטילים שתי קוביות.

מה הסיכוי שסכומן יהיה 5?

$$\boxed{\frac{4}{36}=\frac{1}{9}}$$

מה הסיכוי שהקובייה הראשונה נפלה על 1?

$$\boxed{\frac{1}{6}}$$

בהינתן שסכום הקוביות הוא 5, מה הסיכוי שהקובייה הראשונה נפלה על 1?

הסתברות מותנית

יהי (Ω,P) מרחב הסתברות.

יהי $B\subseteq\Omega$ מאורע בעל הסתברות <u>חיובית</u>.

נניח ש – A מאורע.

נגדיר את $P(A|B)$ להיות **ההסתברות של A בהינתן B**.

נגדיר את מרחה ההסתברות המותנה ב – B :

$$\big(\Omega, P(*\,|B)\big)$$

כאשר :

$$P(x|B)=\begin{cases}\dfrac{P(x)}{P(B)} & , \quad x\in B\\ 0 & , \quad x\notin B\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}}$$

דוגמה

$A=\{$סכום שתי הקוביות הוא 5$\}$.

$B=\{$הקובייה הראשונה נפלה על 1$\}$.

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{36}}{\frac{1}{9}}=\frac{1}{4}$$

סימון

סימונים כאשר מדובר בהסתברות מותנית עם שלושה מאורעות :

$$P(A|B,C)=P(A|B\cap C)$$

$$P(A,B|C)=P(A\cap B|C)$$

דוגמה

שיעור החולים במחלה מסיימת הוא $\frac{1}{2000}$.

פיתחו בדיקה לאיתור המחלה, שצודקת ב - 99% מהמקרים.

הבדיקה מזהה אדם מסוים כחולה.

<u>**שאלה**</u>**:** מה הסיכוי שאדם חולה אם הבדיקה טוענת שהוא חולה?

<u>פתרון</u>: נגדיר את המאורעות:

$A=$ {האדם חולה}.

$B=$ {הבדיקה טוענת שהאדם חולה}.

נתון:

$$P(A)=\frac{1}{2000}\quad , \quad P(B|A)=99\% \quad , \quad P(B^c|A^c)=99\%$$

$$\boxed{P(A|B)=?}$$

$$\Downarrow$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=0.99 \implies P(A\cap B)=\frac{0.99}{2000}$$

$$P(B^c|A^c)=\frac{P(A^c\cap B^c)}{P(A^c)}=0.99 \implies P(A^c\cap B^c)=\frac{0.99}{2000}$$

$$P(A^c\cap B)=P(A^c)-P(A^c\cap B^c)=\frac{1999}{2000\cdot 100}$$

$$P(B)=P(A^c\cap B)+P(A^c\cap B^c)=\frac{1}{2000\cdot 100}\cdot(1999+99)$$

$$\Downarrow$$

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{99}{100\cdot 2000}}{\frac{2098}{100\cdot 2000}}=\frac{99}{2098}\sim\frac{1}{21}$$

■