פתרון מבחן מועד ב – 83-112 חדו"א 1 להנדסה – 05/03/20

מרצה: דר' ארז שיינר | משך המבחן: שלוש שעות | חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד

משקל כל שאלה: 20 נק' | ענו על כל השאלות | כל ציון מעל 100 יעוגל ל100

1. חשבו את הגבולות הבאים:

א. $$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)\sin(x+\sin(x))}{1-\cos(3x)}$$

$$\lim_{x\to 0}\underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{\sin(x+\sin(x))}{x+\sin(x)}}_{\to 1}\cdot\underbrace{\frac{(3x)^2}{1-\cos(3x)}}_{\to 2}\cdot\underbrace{\frac{x+\sin(x)}{9x}}_{\to\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{4}{9}$$

ב. $$\lim_{x\to\infty}x^{(e^{-x})}$$

$$\lim_{x\to\infty}x^{(e^{-x})}=\{\infty^0,\text{אילן}\}=\lim_{x\to\infty}e^{\ln\left(x^{(e^{-x})}\right)}=\lim_{x\to\infty}e^{e^{-x}\ln(x)}=e^0=1$$

הסבר למעבר האחרון

$$e^{-x}\ln(x)=\frac{\ln(x)}{e^x}\to_{x\to\infty}0$$

לפי סדרי גודל

ג. $$\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot 2^n}{n^n}$$

נפעיל את כלל המנה, ונחשב את גבול המנה של איברי הסדרה הנתונה.

$$\frac{(n+1)!\,2^{n+1}}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!\,2^n}=\frac{(n+1)\cdot 2\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{2n^n}{(n+1)^n}=2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}=\frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{2}{e}<1$$

כיוון שגבול המנה קטן מ1, הסדרה המקורית שואפת לאפס.

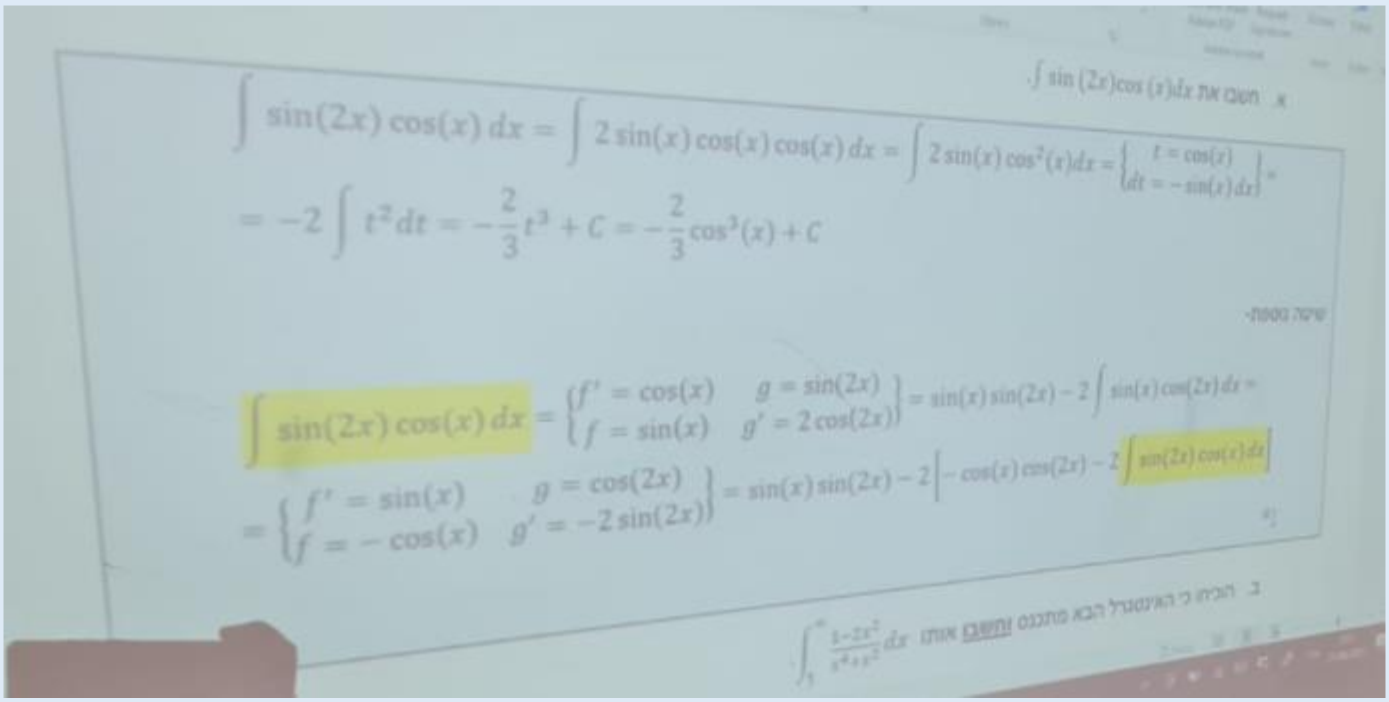
.2

א. חשבו את $\int \sin(2x)\cos(x)dx$.

$$\int \sin(2x)\cos(x)\,dx = \int 2\sin(x)\cos(x)\cos(x)\,dx = \int 2\sin(x)\cos^2(x)dx = \begin{Bmatrix} t = \cos(x) \\ dt = -\sin(x)\,dx \end{Bmatrix} =$$

$$= -2\int t^2 dt = -\frac{2}{3}t^3 + C = -\frac{2}{3}\cos^3(x) + C$$

דרך שנייה



(אין לי כוח להסביר מה הסיפור)

חזרנו לאינטגרל המקורי, נעביר אגף ונבודד

$$-3\int \sin(2x)\cos(x)\,dx = \sin(x)\sin(2x) + 2\cos(x)\cos(2x)$$

$$\int \sin(2x)\cos(x)\,dx = -\frac{\sin(x)\sin(2x) + 2\cos(x)\cos(2x)}{3} + C$$

ב. הוכיחו כי האינטגרל הבא מתכנס **<u>וחשבו</u>** אותו $\int_1^{\infty} \frac{1-2x^2}{x^4+x^2}dx$.

לא צריך גם להוכיח שמתכנס וגם לחשב, אם מחשבים זה מוכיח את ההתכנסות.

נמצא ראשית את הקדומה, ולבסוף נחשב את האינטגרל הלא אמיתי.

$$\int \frac{1-2x^2}{x^4+x^2}dx$$

דרגת המונה קטנה ממש מדרגת המכנה, נפרק לשברים חלקיים

$$\frac{1-2x^2}{x^4+x^2}=\frac{1-2x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

נעשה מכנה משותף ונשווה מונים

$$1-2x^2=Ax(x^2+1)+B(x^2+1)+(Cx+D)x^2$$

נציב $x=0$

$$1=B$$

נשווה מקדמים

המקדם של x

$$0=A$$

המקדם של x^2

$$-2=B+D$$
$$-2=1+D$$
$$D=-3$$

כעת נציב $x=1$

$$-1=2+C-3$$
$$C=0$$

$$\frac{1-2x^2}{x^2(1+x^2)}=\frac{1}{x^2}-\frac{3}{x^2+1}$$

וכעת אפשר לחשב את האיטגרלים של השברים החלקיים

$$\int\frac{1-2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=-\frac{1}{x}-3\arctan(x)$$

$$\int_1^\infty\frac{1-2x^2}{x^2(1+x^2)}dx=\lim_{t\to\infty}\left[-\frac{1}{x}-3\arctan(x)\right]_1^t=\lim_{t\to\infty}-\frac{1}{t}-3\arctan(t)-(-1-3\arctan(1))=-\frac{3\pi}{2}+1+\frac{3\pi}{4}$$

3. קבעו לכל ערך $a\in\mathbb{R}$ כמה פתרונות יש למשוואה $x^3-3x=a$. (הפרידו למקרים.)

$$h(x)=x^3-3x-a$$

$$h'(x)=3x^2-3=3(x^2-1)$$

הנגזרת היא פרבולה מחייכת, שחיובית עד ל-1 ואחרי 1 ושלילית ביניהם

לכן הפונקציה עולה עד $x=-1$ ואז יורדת עד $x=1$ ולאחר מכן ממשיכה לעלות

נבדוק את קצות תחומי העלייה והירידה, גבול במינוס אינסוף, ערך בפלוס ומינוס אחד וגבול באינסוף.

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3-3x-a = \lim_{x\to-\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right) = -\infty$$

נציב את -1 (הקצה השני של תחום העלייה $(-\infty,-1]$)

$$h(-1)=2-a$$

כעת נציב את 1

$$h(1)=-2-a$$

לבסוף נחשב את הגבול באינסוף

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} x^3\left(1-\frac{3}{x^2}-\frac{a}{x^3}\right) = \infty$$

נחלק למקרים לפי נקודות הקיצון האם הן מעל או מתחת או על הציר.

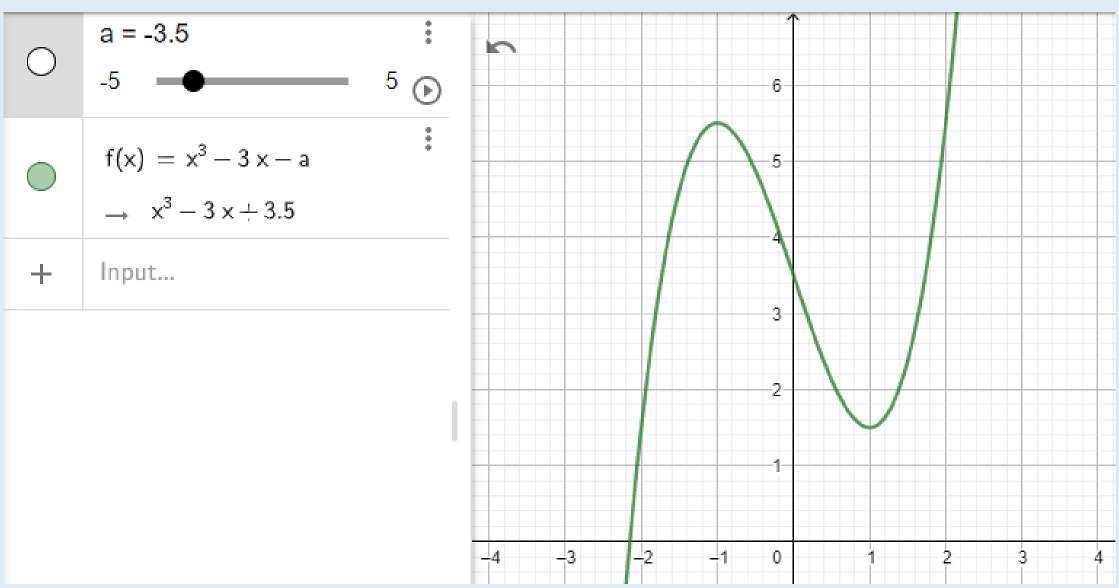
אם $a<-2$

אז $h(-1)>0$ וכן $h(1)>0$

כיוון ש $\lim_{x\to-\infty} h(x)=-\infty$ קיימת נקודה $d<-1$ עבורה $h(d)<0$ וכיוון שהפונקציה רציפה כצירוף של אלמנטריות בקטע $[d,-1]$ לפי משפט ערך הביניים היא חותכת את הציר בקטע זה, וכיוון שהיא עולה היא לא חותכת יותר מפעם אחת בתחום $(-\infty,-1]$.

כעת כיוון שהמינימום של תחום הירידה $[-1,1]$ נמצא ב1 והוא חיובי, אין חיתוך בתחום זה.

לאחר מכן הפונקציה עולה בתחום $[1,\infty)$ המינימום שלה הוא שוב $h(1)>0$ ולכן אין חיתוך גם בתחום זה.



אם $a=-2$ אז $h(-1)=4>0$ ו$h(1)=0$

(לא אחזור על הסברים מלאים כמו במקרה הראשון)

בתחום $(-\infty,-1)$ יש חיתוך אחד. בתחום $[-1,1]$ יש חיתוך אחד ב1 והוא גם החיתוך היחיד בקטע השלישי סה"כ שני חיתוכים

אם $-2 < a < 2$ אזי $h(-1) > 0, h(1) < 0$ יש לנו חיתוכים שונים בכל אחד מן הקטעים סה"כ 3 חיתוכים (פה אני נעזר בפעם הראשונה בכך שהגבול של הפונקציה מימין הוא אינסוף).

אם $a = 2$ אזי $h(-1) = 0, h(1) < 0$ ואנחנו מקבלים חיתוך אחד בקטע הימני וחיתוך ב-1 המשותף לשני הקטעים הנותרים, סה"כ 2 חיתוכים.

ואם $a > 2$ אזי $h(-1), h(1) < 0$ וסה"כ יש חיתוך יחיד רק בקטע הימני.

4. תהי f פונקציה המקיימת $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{3}$ וגם $f(x) > 0$ לכל $x \in [0,\infty)$.

התנאי משאיר לנו בחירה חופשית לחלוטין של מה שקורה בקטע $[0,1)$ ולכל בחירה כזו, שאר הפונקציה נקבעת באופן יחיד.

בעצם הפונקציה מעתיקה כל פעם את הערכים מהקטע הקודם רק מחלקת אותם ב3.

א. הוכיחו/הפריכו: $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

נביט בפונקציה f שבקטע $[0,1)$ שווה ל$\frac{1}{1-x}$ הגבול שלה ב1 משמאל הוא אינסוף.

נמשיך את הפונקציה הזו לפי הנוסחא $\frac{f(x+1)}{f(x)} = \frac{1}{3}$

כיוון שכל פעם הערכים מועתקים ורק מתחלקים ב3 הגבול משמאל בכל מספר טבעי יהיה אינסוף, והפונקציה <u>אינה</u> שואפת לאפס – הפרכנו.

הוכחה מלאה יותר בפתרונות למועד א'.

ב. נתון בנוסף כי f רציפה בתחום $[0,\infty)$, הוכיחו כי $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$.

כיוון שהפונקציה רציפה ב $[0,1]$ לפי ויירשטראס היא מקבלת מקס' ומינ' בקטע.

המקס' בקטע $[1,2]$ יהיה שליש מהמקס' בקטע $[0,1]$

המקס' בקטע $[2,3]$ יהיה $\frac{1}{3^2}$ מהמקס' בקטע $[0,1]$

המקס' בקטע $[n,n+1]$ יהיה $\frac{1}{3^n}M$ כאשר M הוא המקס' בקטע $[0,1]$

סדרת המקסימומים שואפת לאפס וכך ניתן לומר שהפונקציה שלנו קטנה מפונקצית מדרגות ששואפת לאפס וכיוון שהיא חיובית לפי סנדביץ' גם היא שואפת לאפס.

5. תהי סדרה המוגדרת ע"י כלל הנסיגה $a_{n+1}=\frac{a_n^3+a_n}{2}$ וכן $a_1=\frac{1}{2}$.

א. הוכיחו שלכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים כי $a_n<1$.

ב. חשבו את $\lim_{n\to\infty}a_n$.

פתרון בבוחן סמסטר ב' תשפא

https://math-wiki.com/images/3/3d/21EngHedva1QuizSol.pdf

6.

א. חשבו את גבול הסדרה

$$a_n=\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{4n^2}$$

אנחנו למדנו בכיתה משפט לפי אם f רציפה בקטע $[0,1]$ אזי

$$b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)dx$$

מכאן, ניתן להסיק שתת הסדרה במקומות הזוגיים שואפת לאותו הגבול.

$$b_{2n}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n}f\left(\frac{k}{2n}\right)\to\int_0^1 f(x)dx$$

אז נציג את הסכום בצורה הזו

$$\sum_{k=1}^{2n}\frac{k}{4n^2}=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2n}\cdot\frac{k}{2n}$$

זה בדיוק בצורה לעיל כאשר $f(x)=x$ וזו פונקציה רציפה בקטע

ולכן סדרת סכומי הרימן שואפת ל

$$\int_0^1 xdx=\left(\frac{x^2}{2}\right)_0^1=\frac{1}{2}$$

ב. קרבו את $\sqrt[3]{9}$ עד כדי שגיאה של $h = \frac{1}{100}$.

צריך לבחור פונקציה, נקודה מצוייה, נקודה רצוייה ובסוף לבחור את הסדר בהתאם לשגיאה.

$$f(x) = \sqrt[3]{x}$$

ולכן הנקודה הרצוייה היא $x = 9$ ואז אכן $f(9) = \sqrt[3]{9}$

הנקודה המצוייה תהיה $a = 8$

ננחש שסדר $n = 2$ מספיק, ונבדוק האם זה נכון.

$$f(x) = \sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\left(\sqrt[3]{x}\right)^2}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{9}x^{-\frac{5}{3}} = -\frac{2}{9\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}$$

$$f'''(x) = \frac{10}{27}x^{-\frac{8}{3}} = \frac{10}{27\left(\sqrt[3]{x}\right)^8}$$

אם כך, קיימת נקודה $9 > c > 8$ כך ש

$$R_2(f,8)(9) = \frac{f'''(c)}{3!}(9-8)^3 = \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \left(\sqrt[3]{c}\right)^8}$$

בשאלה נדרשנו לוודא כי

$$|R_2| < \frac{1}{100}$$

הערת אגב, בתרגיל זה

$$R_2 > 0$$

ולכן הקירוב שלנו יהיה נמוך מהערך האמיתי (אבל אף אחד לא שאל אותנו את זה, הפעם).

$$|R_2| = \left|\frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \left(\sqrt[3]{c}\right)^8}\right| = \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \left(\sqrt[3]{c}\right)^8} < \frac{10}{6 \cdot 27 \cdot \left(\sqrt[3]{8}\right)^8} = \frac{5}{81 \cdot 2^8} < \frac{1}{100}$$

לכן הקירוב הוא מספיק.

$$\sqrt[3]{9} \approx P_2(f,8)(9) = f(8) + f'(8)(9-8) + \frac{f''(8)}{2!}(9-8)^2 = 2 + \frac{1}{12} - \frac{1}{9 \cdot 32} \underbrace{\lesssim}_{\text{ראינו במקרה זה בלי קשר כי השגיאה הייתה חיובית}} \sqrt[3]{9}$$