הרצאה 5

מטריצות אלמנטאריות

פעולה ρ על מטריצה נקראת פעולת שורה אלמנטארית אם היא מבצעת על המטריצה את אחת הפעולות הבאות:

- $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$.
- $R_i \leftarrow \alpha R_i$ כאשר $\alpha \neq 0$.
- $R_i \leftrightarrow R_j$.

דוגמא

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2+3R_3$ אז $\rho(A)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&8&-8\\0&2&-3\end{pmatrix}$.

המטריצה $\rho(I)$ נקראת מטריצת שורה אלמנטארית, או פשוט מטריצה אלמנטארית.

דוגמא

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2+3R_3$ אז $\rho(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

נשים לב ש

$$\rho(I)A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&8&-8\\0&2&-3\end{pmatrix}=\rho(A).$$

פעולה ρ על מטריצה נקראת פעולת עמודה אלמנטארית אם היא מבצעת על המטריצה את אחת הפעולות הבאות:

- $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$.
- $C_i \leftarrow \alpha C_i$ כאשר $\alpha \neq 0$.
- $C_i \leftrightarrow C_j$.

במקרה זה המטריצה $\rho(I)$ נקראת מטריצת עמודה אלמנטארית.

דוגמא

$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $C_3 \leftarrow C_3+3C_2$ אז $\rho(I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}$.

קיבלנו שמטריצת העמודה האלמנטארית היא מטריצת השורה האלמנטארית מהדוגמא הקודמת.

$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $C_3 \leftarrow C_3+3C_2$ אז $\rho(A)=\begin{pmatrix}1&2&9\\-1&2&7\\0&2&3\end{pmatrix}$.

$$A\rho(I)=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&2&1\\0&2&-3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&3\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&9\\-1&2&7\\0&2&3\end{pmatrix}=\rho(A).$$

משפט

כל מטריצת עמודה אלמנטארית היא גם מטריצת שורה אלמנטארית.

הוכחה

נניח ש $\rho(I)$ היא מטריצת עמודה אלמנטארית.

אפשרות 1: הפעולה ρ היא $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$. $A = \rho(I)$ היא המטריצה שמקיימת $a_{ii} = 1, a_{ji} = \alpha$ ושאר איברי המטריצה הם אפסים.

המטריצה $A = \rho(I)$ מתקבלת ע"י פעולת שורה אלמנטארית $R_j \leftarrow R_j + \alpha R_i$.

אפשרות 2: הפעולה ρ היא $C_i \leftarrow \alpha C_i$ כאשר $\alpha \neq 0$. $A = \rho(I)$ היא המטריצה שמקיימת $a_{kk} = 1$ כאשר $k \neq i$ $\quad a_{ii} = \alpha$ ושאר איברי המטריצה הם אפסים. המטריצה $A = \rho(I)$ מתקבלת ע"י פעולת שורה אלמנטארית $R_i \leftarrow \alpha R_i$ כאשר $\alpha \neq 0$.

אפשרות 3: הפעולה ρ היא $C_i \leftrightarrow C_j$. $A = \rho(I)$ היא המטריצה שמקיימת $a_{kk} = 1$ כאשר $k \neq i, j$, $a_{ij} = a_{ji} = 1$ ושאר איברי המטריצה הם אפסים. המטריצה $A = \rho(I)$ מתקבלת ע"י פעולת שורה אלמנטארית $R_i \leftrightarrow R_j$.

הערה

לכל פעולת שורה אלמנטארית ρ יש פעולה הפוכה ρ^{-1} ומתקיים $\rho^{-1}(\rho(I)) = \rho(\rho^{-1}(I)) = I$.

אם ρ היא הפעולה $R_i \leftarrow R_i + \alpha R_j$ אז ρ^{-1} היא הפעולה $R_i \leftarrow R_i - \alpha R_j$.

אם ρ היא הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$ אז ρ^{-1} היא הפעולה $R_i \leftrightarrow R_j$.

אם ρ היא הפעולה $R_i \leftarrow \alpha R_i$ כאשר $\alpha \neq 0$ אז ρ^{-1} היא הפעולה $R_i \leftarrow \frac{1}{\alpha} R_i$.

דוגמא

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ρ היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2 + 3R_3$ אז $\rho(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

הפעולה ρ^{-1} היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2 - 3R_3$ ואז $\rho^{-1}(I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, אכן מתקיים

$\rho^{-1}(\rho(I)) = \rho(\rho^{-1}(I)) = I$.

הגדרה

מטריצה A היא הפיכה אם יש מטריצה B כך ש $AB = BA = I$. במקרה כזה, אומרים ש B היא מטריצה הופכית ל A וכותבים $B = A^{-1}$.

דוגמא

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

הערה

מכיוון ש $AB = BA = I$ נקבל שהכפל AB, BA מוגדר ולכן המטריצות A, B חייבות להיות ריבועיות.

אם A הפיכה ו $B = A^{-1}$ נקבל ש $AB = BA = I$ ולכן $A = B^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1}$.

משפט

אם A מטריצה הפיכה אז יש רק מטריצה אחת B שהיא הופכית ל A.

הוכחה

נניח ש B,C מטריצות הופכיות ל A ונוכיח ש $B=C$.

$B=BI=B(AC)=(BA)C=IC=C$.

טענה

$$\begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & . & x_m \end{pmatrix} A=\sum_{i=1}^{m} x_i R_i(A).$$

דוגמא לטענה

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -3 \\ 2 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} A=\sum_{i=1}^{m} x_i R_i(A)=1\cdot\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix}+(-2)\begin{pmatrix} 0 & -3 \end{pmatrix}+3\begin{pmatrix} 2 & 1 \end{pmatrix}+(-1)\begin{pmatrix} 3 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 7 \end{pmatrix}$$

הוכחת הטענה

נסמן $C=\begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & . & x_m \end{pmatrix} A$.

מצד אחד נקבל מהגדרת הכפל.

$$c_{1j}=\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}.$$

מצד שני מכפל מטריצה בסקלר ומחיבור מטריצות נקבל.

$$C=\sum_{k=1}^{m} x_k R_k(A)=\sum_{k=1}^{m} x_k \begin{pmatrix} a_{k1} & . & . & . & a_{kn} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{m} x_k a_{k1} & . & . & . & \sum_{k=1}^{m} x_k a_{kn} \end{pmatrix}$$ ואז

$$c_{1j}=\sum_{k=1}^{m} x_k a_{kj}.$$

הערה

נסמן e_i וקטור שורה שכל איבריו אפסים חוץ מהאיבר המקום ה i שהוא שווה ל 1.

מהטענה הקודמת נקבל ש $e_i A=R_i(A)$.

משפט

תהא ρ פעולת שורה אלמנטארית. הוכח:

א. לכל מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, $\rho(A)=\rho(I)A$.

ב. אם A,B מטריצות כך שהכפל AB מוגדר, מתקיים $\rho(AB)=\rho(A)B$.

ג. המטריצה $\rho(I)$ הפיכה, ומתקיים $\rho(I)^{-1}=\rho^{-1}(I)$.

דוגמאות למשפט

א.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ פעולת שורה אלמנטארית ρ $R_3 \leftarrow R_3-2R_1$ ואז $\rho(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -3 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

$$\rho(I)=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ -2 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -3 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}=\rho(A).$$

ב.

$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\\ -2 & -3\end{pmatrix}$ פעולת שואה אלמנטארית ρ $R_3 \leftarrow R_3-2R_1$ ואז $\rho(A)=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -3 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}$.

$B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$ $AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -1 & 0\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 18\\ -1 & -2\\ 1 & -13\end{pmatrix}$ ואז $\rho(AB)=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 18\\ 1 & -18\\ 1 & -13\end{pmatrix}$.

$$\rho(A)B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ -3 & -4\\ -2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 8\\ -1 & 18\\ 1 & -18\\ 1 & -13\end{pmatrix}.$$

ג.

כאשר ρ היא הפעולה $R_2 \leftarrow R_2+3R_3$ והפעולה ההפוכה ρ^{-1} היא $R_2 \leftarrow R_2-3R_3$.

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

<u>הוכחת המשפט</u>

א.

אם ρ היא הפעולה $R_i \leftarrow R_i+\alpha R_j$ אז $C=\rho(I)$ היא המטריצה המקיימת $c_{kk}=1$, $c_{ij}=\alpha$ ושאר איברי המטריצה הם אפס.

תהי מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$, נסמן $C=\rho(I)\in\mathbb{F}^{m\times m}$.

$$CA=\begin{pmatrix}R_1(C)A\\ .\\ .\\ .\\ R_m(C)A\end{pmatrix}.$$

אם $k\neq i$ נקבל ש $e_k=R_k(C)$ ואז $R_k(C)A=e_kA=R_k(A)$.

ואז $R_i(C)=e_i+\alpha e_j$

$R_i(C)A=(e_i+\alpha e_j)A=e_iA+(\alpha e_j)A=e_iA+\alpha(e_jA)=R_i(A)+\alpha R_j(A)$.

קיבלנו שאכן $\rho(A)=CA=\rho(I)A$.

אם ρ היא הפעולה $R_i\leftrightarrow R_j$ אז $C=\rho(I)$ היא מטריצה המקיימת $c_{kk}=1$ כאשר $k\neq i,j$, $c_{ij}=1$, $c_{ji}=1$ ושאר איברי המטריצה הם אפסים.

$$CA=\begin{pmatrix} R_1(C)A \\ . \\ . \\ . \\ R_m(C)A \end{pmatrix}.$$

אם $k\neq i,j$ נקבל ש $R_k(C)=e_k$ ואז $R_k(C)A=e_kA=R_k(A)$.

$R_i(C)A=e_jA=R_j(A)$, $R_j(C)A=e_iA=R_i(A)$.

אם ρ היא הפעולה $R_i\leftarrow\alpha R_i$ כאשר $\alpha\neq 0$ אז $C=\rho(I)$ היא מטריצה המקיימת $c_{kk}=1$ כאשר $k\neq i$, $c_{ii}=\alpha$.

אם $k\neq i$ נקבל ש $R_k(C)=e_k$ ואז $R_k(C)A=e_kA=R_k(A)$.

$R_i(C)A=(\alpha e_i)A=\alpha(e_iA)=\alpha R_i(A)$.

ב.

מסעיף א נקבל ש $\rho(AB)=\rho(I)(AB)=(\rho(I)A)B=\rho(A)B$.

ג.

מכיוון ש ρ^{-1} היא הפעולה ההפוכה ל ρ אז $\rho(\rho^{-1}(I))=\rho^{-1}(\rho(I))=I$.

מסעיף א נקבל ש $\rho(\rho^{-1}(I))=\rho(I)\rho^{-1}(I)$ ולכן $\rho(I)\rho^{-1}(I)=I$.

בנוסף $I=\rho^{-1}(\rho(I))=\rho^{-1}(I)\rho(I)$.

סה"כ קיבלנו ש $\rho^{-1}(I)\rho(I)=\rho(I)\rho^{-1}(I)=I$ ולכן המטריצה $\rho(I)$ הפיכה והמטריצה ההופכית שלה היא $\rho^{-1}(I)$.

<u>מטריצה מדורגת קנונית</u>

בתהליך הדירוג של מטריצה אנו מביאים אותה לצורה מדורגת.

מטריצה $A\in\mathbb{F}^{m\times n}$ היא מדורגת אם קיימים אינדקסים $1\leq j_1\leq\ldots\leq j_r\leq n$ כך שמתקיים:

א. האיברים $a_{1j_1},\ldots,a_{rj_r}$ שונים מאפס.

ב. האיברים שלפניהם כולם אפס, כלומר לכל $i=1,\ldots,r$ ולכל $j<j_i$ מתקיים $a_{ij}=0$.

ג. השורות $r+1,\ldots,m$ מאופסות.

<u>דוגמא</u>

המטריצה $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ מדורגת.

אפשר להמשיך את תהליך הדירוג עוד קצת, על ידי חילוק שורה j_i ב a_{ij_i} ואיפוס הרכיבים שמעל a_{ij_i}.
המטריצה המתקבלת נקראת מדורגת קנונית.
מטריצה מדורגת קנונית היא מטריצה מדורגת שבנוסף מקיימת את התכונות הבאות:
ד. $a_{ij_i} = ... = a_{rj_r} = 1$.
ה. לכל i האיברים שמעל a_{ij_i} הם אפס, כלומר לכל $k < i$, $a_{kj_i} = 0$.
אפשר להביא כל מטריצה, בעזרת פעולות שורה אלמנטאריות, לצורה מדורגת קנונית ואז עבור מטריצה A כלשהי קיימות מטריצות שורה אלמנטאריות $E_1,...,E_k$ כך שהמטריצה $E_k \cdot ... \cdot E_1 \cdot A$ היא מדורגת קנונית.

<u>הערה</u>

מטריצה ריבועית מדורגת קנונית ללא שורת אפסים היא מטריצת היחידה.

<u>דוגמא למטריצה מדורגת קנונית</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

<u>טענה 1</u>

מטריצה $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא הפיכה אם ורק אם יש מטריצות $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = CA = I$.

<u>הוכחה</u>

אם $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ הפיכה אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = BA = I$ ולכן יש מטריצות $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = CA = I$.
אם יש מטריצות $B, C \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = CA = I$ אז מספיק להראות ש $B = C$ כדי להוכיח ש $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ היא הפיכה.

$$C = C \cdot I = C(AB) = (CA)B = I \cdot B = B.$$

<u>טענה 2</u>

תהא $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$. אם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = I$ אז אין ב A שורת אפסים.

<u>הוכחה</u>

נתון שלמטריצה A יש שורת אפסים ז"א קיים $1 \le i \le n$ כך ש $R_i(A) = \vec{0}$.
נניח שקיימת מטריצה B כך ש $AB = I$.
מכפל מטריצה שורה-שורה נקבל ש

$$C = AB = \begin{pmatrix} R_1(A)B \\ . \\ . \\ . \\ R_n(A)B \end{pmatrix}.$$

מהטענה ש $\sum_{i=1}^{m} x_i R_i(A) = \begin{pmatrix} x_1 & . & . & . & . & x_m \end{pmatrix} A$ נקבל.

$R_i(C) = R_i(A)B = \sum_{k=1}^{n} 0 \cdot R_k(B) = \vec{0}$ ז"א $c_{ii} = 0$ בסתירה לכך ש $C = I$.

<u>טענה 3</u>

אם קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ כך ש $AB = I$, אז A אינה שקולת שורה למטריצה עם שורת אפסים.

<u>הוכחה</u>

נניח ש A שקולת שורה למטריצה C ולמטריצה C יש שורת אפסים.
מכיוון ש A שקולת שורה למטריצה C אז ניתן להגיע ל C מ A בעזרת מספר סופי של פעולות שורה אלמנטאריות $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ נסמן $E_i = \rho_i(I)$ מכיוון ש $\rho(A) = \rho(I)A$ נקבל ש

$C = \rho_m\left(...\rho_3\left(\rho_2\left(\rho_1(A)\right)\right)\right) = E_m...E_3E_2E_1A$ המטריצה $P = E_m...E_3E_2E_1$ היא מטריצה הפיכה

מכיוון שמכפלה של מטריצות הפיכות היא מטריצה הפיכה והראינו שמטריצה אלמנטארית היא מטריצה הפיכה. קיבלנו שקיימת מטריצה הפיכה P כל ש $C = PA$.

$P \cdot I = P(AB) = (PA)B = CB$ מכיוון שבמטריצה C יש שורת אפסים אז גם במטריצה P יש שורת אפסים (כפי שראינו בהוכחת טענה 2) בסתירה לכך שהמטריצה P מטריצה הפיכה.

<u>טענה 4</u>

אם $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ הפיכה, אז גם A^t הפיכה, ומתקיים $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

<u>הוכחה</u>

אם $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ אז קיימת מטריצה $B \in \mathbb{F}^{n \times n}$ כך ש $AB = BA = I$ ומתקיים $B = A^{-1}$.

$I^t = I$ ולכן $(AB)^t = I \Leftarrow B^tA^t = I$ בנוסף $(BA)^t = I \Leftarrow A^tB^t = I$ ז"א A^t הפיכה ומתקיים $B^t = \left(A^t\right)^{-1}$ ז"א $\left(A^t\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^t$.

<u>משפט</u>

יהיו $A, B \in \mathbb{F}^{n \times n}$.

אם $AB = I$ אז A, B הפיכות.

<u>הוכחה</u>

אם $AB = I$ אז מטענה 3 המטריצה $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$ לא שקולת שורה למטריצה עם שורת אפסים, ולכן בצורה המדורגת קנונית שלה אין שורת אפסים ולכן היא I.
מכיוון ש A שקולת שורה למטריצה I אז ניתן להגיע ל I מ A בעזרת מספר סופי של פעולות שורה אלמנטאריות $\rho_1, \rho_2, ..., \rho_m$ נסמן $E_i = \rho_i(I)$ מכיוון ש $\rho(A) = \rho(I)A$ נקבל ש

$I = \rho_m\left(...\rho_3\left(\rho_2\left(\rho_1(A)\right)\right)\right) = E_m...E_3E_2E_1A$ נסמן $C = E_m...E_3E_2E_1$ ואז נקבל ש $CA = I$.

נתון ש $AB = I$ הוכחנו ש $CA = I$ ולכן מטענה 1 A מטריצה הפיכה.

נתון ש $AB = I$ והוכחנו ש A מטריצה הפיכה ומטענה 4 A^t מטריצה הפיכה.

$AB = I \Rightarrow (AB)^t = I \Rightarrow B^tA^t = I$ ומכיוון ש A^t הפיכה מתקיים $A^tB^t = I$ ולכן B^t הפיכה ואז $\left(B^t\right)^t$ הפיכה ולכן B הפיכה.

<u>תרגיל 1</u>

תהא $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ הבע את A ואת A^{-1} כמכפלת 3 מטריצות אלמנטאריות.

<u>פתרון</u>

נדרג את המטריצה A.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_2 - R_3 \to R_2}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \overset{R_1 - R_2 \to R_1}{\approx} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\rho(A)=\rho(I)A$

עבור הפעולה $R_1 \leftrightarrow R_2$ נקבל את המטריצה האלמנטארית $E_1=\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ואז

$E_1A=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$. עבור הפעולה $R_2-R_3\to R_2$ נקבל את המטריצה האלמנטארית $E_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{pmatrix}$

ואז $\left(E_2E_1\right)A=E_2\left(E_1A\right)=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$. עבור הפעולה $R_1-R_2\to R_1$ נקבל את המטריצה האלמנטארית

$E_3=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ ואז $\left(E_3E_2E_1\right)A=I$ ולכן $A^{-1}=E_3E_2E_1$.

$\left(A^{-1}\right)^{-1}=\left(E_3E_2E_1\right)^{-1}=E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}$.

מטריצה הופכית של מטריצה אלמנטארית היא גם מטריצה אלמנטארית.

$E_1^{-1}=E_1$. הפעולה ההפוכה לפעולה $R_2-R_3\to R_2$ היא הפעולה $R_2+R_3\to R_2$ ולכן $E_2^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$.

הפעולה ההפוכה לפעולה $R_1-R_2\to R_1$ היא הפעולה $R_1+R_2\to R_1$ ולכן $E_3^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

<u>מציאת המטריצה ההופכית</u>

אם נרצה למצוא את המטריצה ההופכית A נרשום את המטריצה $\left(A|I\right)$ ונדרג את המטריצה A עד שתתקבל הצורה הקנונית. עם במהלך הדירוג נראה שהמטריצה A שקולת שורה למטריצה עם שורת אפסים אז המטריצה A לא הפיכה, אחרת נקבל מטריצה מהצורה $\left(I|B\right)$ ואז B היא ההופכית של A.

<u>תרגיל</u>

מצאו את המטריצה ההופכית של $A=\begin{pmatrix}1&0&2\\2&-1&3\\4&1&8\end{pmatrix}$.

<u>פתרון</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\2&-1&3&0&1&0\\4&1&8&0&0&1\end{array}\right)\underset{\substack{-2R_1+R_2\to R_2\\-4R_1+R_3\to R_3}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&1&0&-4&0&1\end{array}\right)\underset{R_2+R_3\to R_3}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&1&0&0\\0&-1&-1&-2&1&0\\0&0&-1&-6&1&1\end{array}\right)$$

$$\underset{\substack{R_1+2R_3\to R_1\\R_2-R_3\to R_2\\-R_3\to R_3}}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&-1&0&4&0&-1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)\underset{-R_2\to R_2}{\approx}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&-11&2&2\\0&1&0&-4&0&1\\0&0&1&6&-1&-1\end{array}\right)$$