

# תרגיל בית 12 באלגברה מופשטת 1

88-211 סמסטר א' תשע"ו

לאורך התרגיל, נסמן ת"ח  $p$ -סילו ב  $H_p$ .

1. הוכח כי כל חבורה מסדר 130 אינה פשוטה. מצאו חבורה לא אבלית מסדר זה, ומצאו ת"ח נורמלית לא טריוויאלית שלה.

2. תהי  $G$  חבורה מסדר  $385 = 5 \cdot 7 \cdot 11$ .

(א) הוכח כי  $H_{11}, H_7$  נורמליות ב  $G$ .

(ב) הוכח כי  $H_7 \subseteq Z(G)$  (רמז: משפט  $N/C$ ).

(ג) הוכח כי או ש  $Z(G) = H_7$  או ש  $G$  ציקלית.

3. תהי  $G$  חבורה מסדר 30.

(א) הוכח כי לפחות אחת מתת-החבורות סילו  $H_5, H_3$  היא נורמלית.

(ב) הוכח כי ל  $G$  יש ת"ח מסדר 15.

4. הוכיחו כי כל חבורה מסדר 160 אינה פשוטה. (רמז: השתמשו בעידון של משפט קיילי)

5. הוכיחו כי כל חבורה מסדר 40 אינה פשוטה. (רמז: שוב העידון של קיילי, אך הפעם הסתכלו גם על החיתוך עם הת"ח  $A_n$ ).

6. (א) כמה חבורות אבליות מסדר 500 יש? (עד כדי איזומורפיזם)

(ב) בכמה מהן יש איבר מסדר 20?

(ג) בכמה מהן יש איבר מסדר 4?

7. בכמה חבורות אבליות מסדר 3600 ת"ח 5-סילו היא ציקלית?

8. חשבו את  $\exp(S_7), \exp(S_5)$ .

9. הוכיחו כי  $\mathbb{Z}_{11} \times \mathbb{Z}_{35} \cong \mathbb{Z}_{77} \times \mathbb{Z}_5$ .

10. האם קיימת חבורה  $G$  אבלית מסדר 32 כך ש  $\exp(G) = 4$ ,  $[G : G^2] = 4$ ?  
כאשר  $G^2 = \{g^2 \mid g \in G\}$ .