פתרון מערכת משוואות לינארית

על מערכת משוואות לינארית מותר לנו לבצע את הפעולות הבאות:

- כפל בסקלר
- חיבור שורש לשורה אחרת
- החלפת סדר שורות

שיטת גאוס

בשלב הk מבטלים את המשוואה הk מהשורות $k+1,\dots n$

סימון:
- מטריצה בשלב הk - $A^{(k)}$
- הווקטור b בשלב הk - $b^{(k)}$

כופל שורה

$$m_{ik} = \frac{a_{ik}^{(k)}}{a_{kk}^{(k)}} \qquad (i > k)$$

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} \cdot a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} \cdot b_k^{(k)}$$

האלגוריתם

1. לכל $k \leftarrow 1 \text{ to } n$:
   (א) חשב כולפי שורה ע"פ השורה הk.
   (ב) החסר מכל שורת k...
2. פתור ע"י הצבה לאחור

דוגמה

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 10 \\ 2 \end{bmatrix}$$

נרצה להעביר את זה לצורה של מטריצה מורחבת:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & 4 & 10 \\ 2 & -3 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

$$m_{21} = \frac{3}{1} = 3 \qquad m_{31} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & -9 & 2 & -8 \end{bmatrix}$$

$$m_{32} = \frac{-9}{-4} = 2.25$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 6.5 & 3.25 \end{bmatrix}$$

זה בעצם מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 5 \\ -4x_2 - 2x_3 = -5 \\ 6.5x_3 = 3.25 \end{cases}$$

וניתן לבצע הצבה לאחור:

$$x_3 = \frac{3.25}{6.5} = \frac{1}{2}$$

$$-4x_2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = -5 \Rightarrow x_2 = \frac{2 \cdot \frac{1}{2} - 5}{-4} = 1$$

$$x_1 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot \frac{1}{2} = 5 \Rightarrow x_1 = -3 \cdot 1 - 2 \cdot \frac{1}{2} + 5 = 1$$

שיטת פירוק LU

בהינתן מערכת $A\vec{x} = \vec{b}$, נרצה לבצע פירוק $A = L \cdot U$, כך שU משולשית עליונה וL משולשית תחתונה, ואז $LU\vec{x} = \vec{b}$. הרעיון הוא "לזכור" את הדירוג של A ולהשתמש בו שוב ושוב עם bים שונים:

$$U\vec{x} = \vec{y}$$

$$L\vec{y}=\vec{b}$$

הרעיון הוא שL תכיל את כופלי השורה:

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ m_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0\\ m_{31} & & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & & \ddots & \vdots\\ m_{n1} & m_{n2} & \cdots & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

חישוב התוצאה לאחר הפירוק

$$A^{-1}=?$$

$$A\vec{x}=I$$

$$\vec{e}^{(i)}=\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{bmatrix}\leftarrow i$$

$$A\vec{x}^{(i)}=\vec{e}^{(i)}$$

דוגמה

בדוגמה שעשינו בשיטת גאוס, היה לנו

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 3 & 5 & 4\\ 2 & -3 & 6\end{bmatrix}$$

לפי מה שמצאנו בחישוב,

$$U=\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\ 0 & -4 & -2\\ 0 & 0 & 6.5\end{bmatrix}\qquad L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 2 & 2.25 & 1\end{bmatrix}$$

ולכן נרצה לפתור $LUx=b$:

$$U\vec{x}=\vec{y}\Rightarrow L^{-1}y=b$$

נחשב את העמודה הראשונה:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\0 & -4 & -3\\0 & 0 & 5.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

נמצא את y באמצעות הצבה לפנים

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\3 & 1 & 0\\2 & 2.25 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{matrix}y_1=1\\y_2=-3\\y_3=4.75\end{matrix}$$

עכשיו אנחנו יודעים את y:

$$\begin{bmatrix}1 & 3 & 2\\0 & -4 & -3\\0 & 0 & 5.6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_{11}\\c_{21}\\c_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\-3\\4.75\end{bmatrix}$$

ואפשר לבצע הצבה לאחור:

$$c_{31}=\frac{4.75}{6.5}=0.7308$$

$$-4c_{21}-2\cdot 0.7308=-3\Rightarrow c_{21}=0.3846$$

$$c_{11}=-1.6154$$

וממשיכים עם שאר העמודות.

תרגיל

נתונה מטריצה משולשית עליונה U המקיימת $|u_{ij}|\leq 1$, $u_{ii}=1$.

מצא חסם עבור x_i כאשר $\vec{x}=\begin{bmatrix}x_1\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}$ הוא פתרון המערכת $U\vec{x}=\vec{e}_n$, כלומר $U\vec{x}=\begin{bmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{bmatrix}$

פתרון

$$U=\begin{bmatrix}1 & u_{12} & \cdots & u_{1n}\\0 & 1 & \ddots & u_{2n}\\0 & 0 & \ddots & \vdots\\0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}$$

נוכיח שלכל $i \in [n-1, 1]$ מתקיים $|x_i| \leq 2^{n-i-1}$

בסיס: $x_n = 1$.
עבור השורה $n-1$, צ"ל $|x_{n-1}| \leq 1$

$$1 \cdot x_{n-1} + u_{n-1,n} \cdot x_n = 0$$

$$x_{n-1} + u_{n-1,n} = 0 \Rightarrow |u_{n-1}| = |u_{n-1,n}| \leq 1$$

צעד: נניח נכונות הטענה עבור $x_{n-1}, \dots x_i$ ונוכיח עבור x_{i-1}:

$$x_{i-1} + u_{i-1,i} \cdot x_i + \cdots + u_{i-1,n} \cdot x_n = 0$$

$$|x_{i-1}| = \left| \sum_{k=i}^{n} u_{i-1,k} \cdot x_k \right| \leq \sum_{k=i}^{n} |u_{i-1,k} \cdot x_k| \leq$$

$$\leq \sum_{k=i}^{n} |x_k| \leq 1 + 1 + 2 + 4 + \dots 2^{n-i-1}$$

$$|x_{i-1}| \leq \cancel{1} + 2^{n-i-\cancel{1}+\cancel{1}} - \cancel{1} = 2^{n-i}$$

$$\sum_{k=0}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 1$$