פתרון תרגיל מספר 2 מבנים אלגבריים

17 במרץ 2019

1. תזכורת להגדרה: תהא $\sigma \in S_n$ נגדיר

$$t = \#\left\{(i,j) \in \{1,\ldots,n\} \times \{1,\ldots,n\} : \ i < j, \sigma(j) < \sigma(i)\right\}$$

להיות מספר היפוכי הסדר [אינדקסים (i,j) המקיימים כי $i<j$ וגם $\sigma(j) < \sigma(i)$ נקראים היפוך סדר. שימו לב כי בשאלה זו (i,j)זהו זוג סדור של האינדקסים i,j ולא תמורה]. עוד נגדיר את הסימן של σ להיות

$$sgn(\sigma) = (-1)^t$$

כלומר הסימן של σ הוא -1 בחזקת מספר היפוכי הסדר. לכן, אם מספר היפוכי הסדר הוא זוגי הסימן שווה 1 ואם מספר היפוכי הסדר הוא אי זוגי אזי הסימן שווה ל -1. התמורות שהסימן שלהם שווה 1 נקראות תמורות זוגיות ואילו תמורות שהסימן שלהם שווה -1 נקראות תמורות אי זוגיות.

(א) תנו דוגמא ל 2 תמורות זוגיות ו 2 תמורות אי זוגיות ב S_5.
פתרון: למשל $(1,2,3) = (1,2)(2,3)$ ו $(1,2,4) = (1,2)(2,4)$ זוגיות
למשל $(1,2,3,4) = (1,2)(2,3)(3,4)$ ו $(1,2)$ אי זוגיות

(ב) יהא $1 < n$. נסמן את קבוצת התמורות הזוגיות ב S_n ב A, נסמן את קבוצת התמורות האי זוגיות ב B. הוכיחו כי $|A| = |B|$ ומצאו כמה תמורות זוגיות יש. [הדרכה: הגדירו $F : A \to B$ ע"י הכפלה בתמורה מסויימת (רמז: תמורה שתהפוך את הסימן), והראו שF מוגדרת היטב והפיכה].
פתרון: בהינתן תמורה זוגית $\sigma \in A$ ניתן להציגה עם מספר זוגי n של חילופים ולכן את התמורה $\sigma\,(1,2)$ניתן להציג עם $n+1$ חילופים שזהו מספר אי זוגי ולכן $\sigma\,(1,2) \in B$ ולכן F מוגדרת. בנוסף אם נגדיר

$$G : B \to A$$

ע"י $G(\sigma) = (1,2)\,\sigma$ אז היא מעבירה תמורות אי־זוגיות לתמורות זוגיות בדומה ל F. בנוסף מתקיים כי $G = F^{-1}$ כי

$$G \circ F(\sigma) = G(F(\sigma)) = G((1,2)\,\sigma) = (1,2)\,(1,2)\,\sigma = \sigma$$

לכל $\sigma \in A$, וגם באופן דומה $F \circ G(\sigma) = \sigma$ לכל $\sigma \in B$. מכאן ש $|A| = |B|$.
כעת, כיוון ש $S_n = A \cup B$ ו $|S_n| = n!$ נקבל (כיוון שאין איבר משותף ל A ול B): $n! = |A| + |B| = 2\,|A|$ ולכן $|A| = \frac{n!}{2}$.

2. קבעו עבור כל אחת מהקבוצות והפעולות הבאות האם היא אגודה/מונואיד/חבורה. במידה שקיימת יחידה (רגילה/שמאלית/ימנית) מצאו אותה. במידה שמדובר בחבורה מצאו את ההופכי של כל איבר.

(א) קבוצת שורשי היחידה מסדר n, כלומר הקבוצה $X = \{a \in \mathbb{C} \,|\, a^n = 1\}$ עם פעולת הכפל הרגיל של מספרים מרוכבים.

פתרון : חבורה עם היחידה 1 של המספרים המרוכבים.

סגירות: עבור כל $a, b \in X$ מתקיים כי $a^n = b^n = 1$ ולכן $(ab)^n = a^n b^n = 1 \cdot 1 = 1$ ולכן $ab \in X$.

קיבוציות: מתקיים כי כפל מספרים מרוכבים הוא קיבוצי.

יחידה: המספר 1 המרוכב מקיים $1^n = 1$ ולכן $1 \in X$ והוא נטרלי לכפל של כל מספר מרוכב ובפרט למספרים ששייכים ל X.

הוכפי: לכל $a \in X$ מתקיים $a \neq 0$ (כי $1 \neq 0^n$) ולכן קיים לו הופכי $a^{-1} \in \mathbb{C}$ נראה כי $a^{-1} \in X$ שזה מוכיח שלכל איבר ב X יש הופכי ולכן X חבורה. אכן, $(a^{-1})^n = (a^n)^{-1} = 1^{-1} = 1$.

(ב) קבוצת המטריצות הריבועיות מסדר $n > 1$, כלומר $\mathbb{F}^{n \times n}$ עם פעולת כפל מטריצות

פתרון : מונואיד.

סגירות: לכל A, B מטריצות ריבועיות מתקיים כי AB גם כן מטריצה ריבועית.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי.

יחידה: מטריצת היחידה I נטרלית לכפל מטריצות.

כיוון שמטריצת האפס הריבועית שייכת לקבוצה ואין לה הופכי אזי נקבל כי המטריצות הריבועיות הם מונואיד ולא חבורה.

(ג) המטריצות $G = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \,|\, 0 < a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \right\}$ עם פעולת כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זוהי חבורה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & a' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa' & ab' + ba' \\ 0 & aa' \end{pmatrix}$ וכיוון ש $0 < a, a'$ גם $0 < aa'$ (וכמובן ש $ab' + ba' \in \mathbb{R}$) נקבל כי הכפל שייך ל G.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי ובפרט כפל מטריצות מ G.

יחידה: מטריצת היחידה $I_2 \in G$ כי עבור $a = 1 > 0, b = 0$ נקבל כי $I = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

הופכי: עבור מטריצה $\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ ההופכית שלה (היא קיימת כי הדט' שלה שווה $a^2 \neq 0$) היא $\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \in G$ (כי $0 < \frac{1}{a}, \frac{-b}{a} \in \mathbb{R}$). הוכחה:

$$\frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a & -b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & a^2 \end{pmatrix} = I$$

(ד) הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם הפעולה $a*b=a^b$
פתרון : זה אפילו לא אגודה כי $2=2*1=2*(1*2)\neq(2*1)*2=2*2=4$

(ה) תת קבוצה של הפולינומים $X=\{p(x)\in\mathbb{R}[x]\,|p(1)=0\}$ עם חיבור פולינום רגיל.
פתרון : זה חבורה.
סגירות: לכל $p(x),q(x)\in X$ מתקיים כי $p(1)=q(1)=0$ ולכן $(pq)(1)=p(1)q(1)=0$ ולכן $p(x)q(x)\in X$.
קיבוציות: חיבור פולינומים הוא קיבוצי ובפרט חיבור פולינומים מ X.
יחידה: פולינום האפס $\mathbf{0}(x)$ מקיים $\mathbf{0}(1)=0$ ולכן $\mathbf{0}(x)\in X$ והוא נטרלי לחיבור פולינומים ובפרט נטרלי לחיבור פולינומים מ X.
נגדי: לכל $p(x)\in X$ מתקיים כי $p(1)=0$ ולכן $-p(1)=0$ ולכן $-p(x)\in X$ ומתקיים כי $p(x)+(-p(x))=\mathbf{0}(x)$

(ו) הטבעיים $G=\mathbb{N}$ עם פעולת מקסימום $a*b=\max\{a,b\}$
פתרון : זה מונואיד.
סגירות: לכל a,b טבעיים מתקיים כי $a*b=\max\{a,b\}$ טבעי.
קיבוציות: לכל a,b,c טבעיים מתקיים כי

$$(a*b)*c=\max\{a*b,c\}=\max\{\max\{a,b\},c\}=\max\{a,b,c\}= \\ =\max\{a,\max\{b,c\}\}==\max\{a,b*c\}=a*(b*c)$$

איבר היחידה: 1 כי לכל a טבעי מתקיים כי $a\geq 1$ ולכן $1*a=\max\{1,a\}=a$ וגם $a*1=a$.
אין הופכי ל 2 כי לכל a טבעי מתקיים כי $2*a=\max\{2,a\}\geq 2\neq 1$ ולכן G היא מונואיד ולא חבורה.

(ז) קטעים פתוחים בקבוצת הממשיים

$$G=\left\{\,(a,b)\subseteq\mathbb{R}\,|\,a<b,\;a,b\in\mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}\,\right\}\cup\{\emptyset\}$$

עם פעולת חיתוך קבוצות.
פתרון : זה מונואיד.
סגירות: לכל $(a,b),(a',b')\in X$ מתקיים כי $(a,b)\cap(a',b')=(\max\{a,a'\},\min\{b,b'\})\in X$.
קיבוציות: חיתוך קבוצות הוא קיבוצי ובפרט חיתוך קבוצות מ X.
איבר היחידה: $\mathbb{R}\in X$ כי לכל $A\subseteq\mathbb{R}$ (ובפרט לקבוצות ב X) כי $A\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}\cap A=A$.
אין הופכי ל $(0,1)\in X$ כי לכל $(a,b)\in X$ מתקיים כי $(a,b)\cap(0,1)\subseteq(0,1)\neq\mathbb{R}$ ולכן Gהיא מונואיד ולא חבורה.

(ח) תת קבוצה של המטריצות $G=\{\begin{pmatrix}0&a\\0&b\end{pmatrix}\,|\,a,b\in\mathbb{R}\}$ עם כפל מטריצות רגיל.
פתרון : זה אגודה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & b' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & ab' \\ 0 & bb' \end{pmatrix} \in G$.

קיבוציות: כפל מטריצות הוא קיבוצי ובפרט מטריצות מ G.

היחידות ימניות הן $\left\{\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\right\}$ כי לכל a, b, a' מתקיים כי $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$.

אין יחידות שמאליות. הוכחה: נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ יחידה שמאלית אזי צריך להתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}$ אבל $\begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

(ט) המטריצות המשולשיות $G = \left\{\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R}\right\}$ עם כפל מטריצות רגיל.

פתרון : זה אגודה.

סגירות: לכל $\begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ מתקיים כי

$$\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a' & b' \\ 0 & 0 & c' \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ac' \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$$

אין יחידה. הוכחה: נניח בשלילה כי $\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in G$ יחידה אזי צריך להתקיים $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ אבל הכפל של מטריצות אלו היא מטריצת האפס.

(י) תהי $A \neq \varnothing$ קבוצה, וניקח את $(P(A), \Delta)$ כלומר, קבוצת החזקה עם פעולת ההפרש הסימטרי.

פתרון : זו חבורה: סגירות: אם $B, C \subseteq A$ אז ברור ש- $B\Delta C \subseteq A$. ראינו בבדידה שהפעולה אסוציאטיבית. יחידה: $\forall B \in P(A) : B\Delta\varnothing = \varnothing\Delta B = B$, לכן $\varnothing$ היא יחידה. קיום הופכי: כל קבוצה היא ההופכי של עצמה: $\forall B \in P(A) : B\Delta B = \varnothing$.

3. האם קיימת אגודה $(A, \star)$, $|A| \geq 2$, עבורה כל איברי A הם יחידה ימנית?

פתרון : כן. נגדיר את הפעולה באופן הבא: $a \star b = a$. זו אגודה:

כמובן שיש סגירות.

קיבוציות: $a = a \star (b \star c)$, ומאידך: $a = a \star b = a \star c = (a \star b) \star c$.

לפי הגדרת הכפל כל איבר הוא יחידה ימנית, ולא שמאלית כי לכל b יש $a \neq b$ ונקבל: $a \neq b = b \star a$, לכן b לא יחידה שמאלית.