

מבנים אלגבריים (89-214)

מרצה: ד"ר מיכאל משה שיין

תשע"ד סמסטר א'

מבחן מסכם, מועד ב'

יש לענות על כל השאלות. בפתרונותיך לשלוש השאלות הראשונות יש לנמק באופן מלא את כל הטענות שלך. בשאלות 4-7, אין צורך לנמק את התשובות. בשאלות אלה, תשובה נכונה תקבל 10 נקודות, תשובה שגויה תקבל 0 נקודות, ותשובה ריקה תזכה במספר נקודות שצוין בשאלה. כל חומר עזר אסור. משך הבחינה: שתיים וחצי. בהצלחה!

1. (20 נק') תהי G חבורה כלהשי, ויהיו $g, h \in G$ איברים. הוכח את השוויון
$$o(gh) = o(hg)$$

2. (20 נק') מייין את כל החבורות האבליות מסדר 72. כלומר, רשום רשימה של חבורות כך שכל חבורה אבלית מסדר 72 איזומורפית לחבורה אחת בלבד מן הרשימה.

3. (20 נק') תהי G חבורה סופית, ויהי $g \in G$ איבר. תהי c העוצמה של מחלקת הצמידות של g . הוכח כי $c \mid \frac{|G|}{o(g)}$.

4. (3 נק' לתשובה ריקה) תהיינה G ו- K חבורות, $\varphi : G \rightarrow K$ הומומורפיזם של חבורות, ותהי $H \leq G$ תת-חבורה נורמלית. האם בהכרח $\varphi(H)$ הינה תת-חבורה נורמלית של K ?

(א) כן, תמיד.

(ב) כן אם K אבלית, אך אם K לא אבלית אז יתכן שלא.

(ג) יתכן שלא, אפילו אם K אבלית.

5. (3 נק' לתשובה ריקה) תהי S קבוצה, ותהי \mathcal{M} הקבוצה של כל התת-קבוצות של S . איזו מן הפעולות הבינאריות הבאות נותנות ל- \mathcal{M} מבנה של מונויד? לסמן את כל התשובות הנכונות.

(א) $A \cdot B = A \cup B$ לכל $A, B \in \mathcal{M}$.

(ב) $A \cdot B = A \cap B$ לכל $A, B \in \mathcal{M}$.

(ג) $A \cdot B = A$ לכל $A, B \in \mathcal{M}$.

6. (2 נק' עבור תשובה ריקה) תהיה $\mathbb{R}[x]$ החבורה של כל הפולינומים עם מקדמים ממשיים, תחת פעולת החיבור. לאיזה מן החבורות הבאות יש תת-חבורה אמיתית שהיא איזומורפית לחבורה עצמה?

(א) $\mathbb{Z}_{2014} \times S_6$.

(ב) \mathbb{Z} .

(ג) $\mathbb{R}[x]$.

(ד) התשובות (א) ו-(ב) אך לא (ג).

(ה) התשובות (ב) ו-(ג) אך לא (א).

(ו) אף אחת מן התשובות הנ"ל.

7. (3 נק' לתשובה ריקה) נתבונן בהעתקה $\varphi : S_6 \rightarrow S_7$ המוגדרת כך:

$$\varphi(f)(n) = \begin{cases} f(n) & : 1 \leq n \leq 6 \\ 7 & : n = 7 \end{cases}$$

איזה מן הטענות הבאות נכונות? נסמן את כל התשובות הנכונות:

(א) φ הומומורפיזם.

(ב) φ חד-חד-ערכי.

(ג) φ על.