פתרון תרגיל 2

10 באפריל 2018

1. בחרו ארבעה מהסעיפים הבאים (לבוחרים יותר מארבעה ייבדקו הארבעה הראשונים) ובדקו האם הפונקציות הן חח"ע? על? נמקו.
   א. $f:\mathbb{Z}\to\mathbb{N}\cup\{0\}$ המוגדרת ע"י $f(n)=|n|$.
   ב. $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=x^3$.
   ג. $f:\mathbb{N}\times\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ מוגדרת ע"י: $f(n,m)=2^n\cdot 3^m$.
   ד. תהי A קבוצה ו־$f:P(A)\to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(B)=A\setminus B$.
   ה. תהי A קבוצה לא ריקה, $B\subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f:P(A)\to P(B)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C)=C\cap B$.
   ו. תהי A קבוצה לא ריקה, $B\subset A$ (מוכל ממש) תת קבוצה, ו־$f:P(B)\to P(A)$ פונקציה המוגדרת לפי $f(C)=C\cup(A\setminus B)$.
   ז. $f:P(\mathbb{N})\to\mathbb{N}$ המוגדרת ע"י: $f(\phi)=1$, ולכל $A\neq\phi$ מגדירים $f(A)=\min(A)$, כלומר A נשלחת לאיבר הקטן ביותר שבה (לפי יחס הסדר הרגיל).

פתרון:

א. על (כל איבר טבעי או אפס הוא המקור של עצמו). לא חח"ע כי $f(1)=f(-1)$.

ב. חח"ע ועל: משיקולי אינפי. זו פונקציה רציפה ששואפת לאינסוף ומינוס אינסוף בהתאמה לשאיפת ה־x, לכן על. בנוסף, לכל $x\neq 0$ הנגזרת חיובית ולכן עולה ממש ולכן חח"ע.

ג. חח"ע: כיון ששניהם ראשוניים שונים, אם $(n,m)\neq(k,\ell)$ אז $2^n\cdot 3^m\neq 2^k\cdot 3^\ell$. לא על: לראשוניים אחרים אין מקור, למשל 5.

ד. נתייחס ל־A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: אם $C\neq D$ אז באחת הקבוצות יש איבר שאין בשניה. נניח לצורך העניין (קוראים לזה "בלי הגבלת הכלליות" וכותבים בה"כ) שקיים $x\in C\setminus D$ ולכן $x\in D^c\setminus C^c$ ולכן $C^c\neq D^c$, וזאת אומרת ש־f חח"ע. על: תהי $B\in P(A)$, אזי $f(B^c)=B$ ומצאנו מקור, ולכן היא גם על.

ה. חח"ע: לא, כי $f(A)=f(B)=B$. על: כן: לכל $C\in P(B)$ היא המקור של עצמה (כי $f(C)=C\cap B=C$).

ו. נתייחס ל־A כקבוצה האוניברסלית לתרגיל זה. חח"ע: כן: אם $C\neq D\in P(B)$, אז בה"כ קיים $x\in C\setminus D$ ולכן $x\in(C\cup B^c)\setminus(D\cup B^c)$ ולכן $x\in f(C)\setminus f(D)$ ולכן $f(C)\neq f(D)$ ולכן f חח"ע. על: לאו דוקא, אם ב־B^c יש לפחות שני איברים שונים, נסמנם x,y, אזי ל־$\{x\}$ אין מקור.

ז. לא חח"ע: $f(\phi)=f(\mathbb{N})=1$. על: כן, לכל $n\in\mathbb{N}$ הקבוצה $\{n\}$ היא מקור.

2. תהיינה A,B,C,D קבוצות לא ריקות עם פונקציות $f:A\to C, g:B\to D$. נגדיר

פונקציה $f\times g: A\times B\to C\times D$ ע"י:

$$f\times g(a,b)=(f(a),g(b))$$

הוכיחו:

א. f,g חח"ע $\iff$ $f\times g$ חח"ע.

ב. f,g על $\iff$ $f\times g$ על.

<u>פתרון:</u>

א. נניח f,g חח"ע, ונניח $f\times g(a_1,b_1)=f\times g(a_2,b_2)$. לכן נקבל $(f(a_1),g(b_1))=(f(a_2),,g(b_2))$, ומהגדרת זוג סדור נקבל

$$f(a_1)=f(a_2)\wedge g(b_1)=g(b_2)$$

כיון שהן פונקציות חח"ע נובע $a_1=a_2\wedge b_1=b_2$, ולכן $(a_1,b_1)=(a_2,b_2)$.

כעת נניח ש־$f\times g$ חח"ע, ונראה ש־f חח"ע, ובאותו אופן בדיוק ניתן להראות על g. נניח $f(a_1)=f(a_2)$ ויהי $b\in B$. לכן נקבל:

$$f\times g(a_1,b)=(f(a_1),g(b))=(f(a_2),g(b))=f\times g(a_2,b)$$

וכיון שהיא חח"ע נקבל $(a_1,b)=(a_2,b)$ ולכן $a_1=a_2$.

ב. נניח f,g על ויהי $(c,d)\in C\times D$. כיון שהן על יש $a\in A,b\in B$ כך ש $f(a)=c,g(b)=d$, ולפי הגדרה נקבל $f\times g(a,b)=(c,d)$.

נניח $f\times g$ על ונראה ש־f על, בואותו אופן בדיוק ניתן להראות על g. יהי $c\in C$. הקבוצות לא ריקות ולכן יש $d\in D$. $f\times g$ על ולכן יש $(a,b)\in A\times B$ כך ש $f\times g((a,b))=(c,d)=(f(a),g(b))$, כלומר $f(a)=c$ ומצאנו מקור.

3. תהיינה A,B קבוצות עם החלוקות $\{A_i\}_{i\in I},\{B_i\}_{i\in I}$. בנוסף, לכל $i\in I$ נתונה פונקציה חח"ע ועל:

$$f_i: A_i\to B_i$$

הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל

$$f: A\to B$$

<u>פתרון:</u>

נרצה להגדיר פונקציה $f: A\to B$. יהי $a\in A$ כיון שמדובר בחלוקה יש בדיוק $i\in I$ אחד עבורו $a\in A_i$, ולכן נוכל להגדיר $f(a)=f_i(a)$. נוכיח שהיא חח"ע ועל:

חח"ע: נניח $f(a_1)=f(a_2)$, יש $i\in I$ כך ש $f(a_1)\in B_i$, לפי הגדרת הפונקציה f נקבל ש־$a_1,a_2\in A_i$ (רק משם יכולים להגיע איברים ל־B_i) ו־$f_i(a_1)=f_i(a_2)$. כיון ש־ f_i חח"ע, נקבל $a_1=a_2$.

על: יהי $b\in B$. לכן יש $i\in I$ כך ש־ $b\in B_i$. כיון ש־ f_i על אז יש $a\in A_i$ כך ש־ $f_i(a)=b$, ולפי הגדרת f מתקיים: $f(a)=b$, ו־a הוא המקור.

4. תהי $f: X \to Y$ פונקציה ו־$B \subseteq Y$.
א. הוכיחו כי: $f[f^{-1}[B]] \subseteq B$.
ב. מצאו דוגמא לפונקציה כנ"ל כך שההכלה היא הכלה ממש.
ג. הוכיחו שאם f על אז $f[f^{-1}[B]] = B$

<u>פתרון:</u>

א. יהי $y \in f[f^{-1}[B]]$ אזי קיים $x \in f^{-1}[B]$ כך ש־$f(x) = y$. כיוון ש־x הוא מקבוצת המקורות של B ובנוסף הוא המקור של y זאת אומרת ש־ $y \in B$ (הוא לא יכול להיות מקור של איבר נוסף כי הפונקציה חד ערכית).

ב. $X = Y = \{1,2\}, B = \{1,2\}$ ונגדיר $f(1) = f(2) = 1$ אזי $f^{-1}[B] = \{1,2\}$ ו־$f(\{1,2\}) = \{1\} \subset \{1,2\} = B$.

ג. נניח ש־f על, ונותר להוכיח רק את הכיוון השני, כלומר ש־$B \subseteq f[f^{-1}[B]]$. יהי $b \in B$. כיון ש־f על, זאת אומרת שקיים $x \in X$ כך ש־$f(x) = b$ ולכן $x \in f^{-1}[B]$, ולכן $b = f(x) \in f[f^{-1}[B]]$.

5. תהי $f: X \to Y$ פונקציה ותהיינה תתי הקבוצות $A_1, A_2 \subseteq X, B_1, B_2 \subseteq Y$.
בחרו שלושה מהסעיפים הבאים (לבוחרים יותר משלושה ייבדקו השלושה הראשונים) והוכיחו או הפריכו את הטענות:
א. $f^{-1}[B_1 \cap B_2] = f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.
ב. $f[A_1 \cap A_2] = f[A_1] \cap f[A_2]$.
ג. $f^{-1}[B_1^c] = (f^{-1}[B_1])^c$.
ד. $f[A_1^c] = (f[A_1])^c$.
ה. $f[A_1 \triangle A_2] = f[A_1] \triangle f[A_2]$.
ו. $f^{-1}[B_1 \triangle B_2] = f^{-1}[B_1] \triangle f^{-1}[B_2]$.

<u>פתרון:</u>

א. הוכחה: $x \in f^{-1}[B_1 \cap B_2] \iff f(x) \in B_1 \cap B_2 \iff f(x) \in B_1 \wedge f(x) \in B_2 \iff x \in f^{-1}[B_1] \wedge x \in f^{-1}[B_2] \iff x \in f^{-1}[B_1] \cap f^{-1}[B_2]$.

ב. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. כיוון ש־ $A_1 \cap A_2 = \phi$ נובע ש־ $f[A_1 \cap A_2] = f[\phi] = \phi$. אבל $f(A_1) = f(A_2) = \{1\}$ ולכן $f[A_1] \cap f[A_2] = \{1\} \cap \{1\} = \{1\} \neq \phi$.

ג. הוכחה: $x \in f^{-1}[B_1^c] \iff f(x) \in B_1^c \iff f(x) \notin B_1 \iff x \notin f^{-1}[B_1] \iff x \in (f^{-1}[B_1])^c$.

ד. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}$. $A_1^c = \{2\}$ ולכן $f[A_1^c] = f[\{2\}] = \{1\}$. מצד שני $f[A_1] = \{1\}$ ולכן $(f[A_1])^c = \{2\} \neq \{1\}$.

ה. הפרכה: $X = Y = \{1,2\}$ ו־$f(1) = f(2) = 1$ ונתבונן ב־$A_1 = \{1\}, A_2 = \{2\}$. כיוון ש־$A_1 \triangle A_2 = \{1,2\}$ אזי $f[A_1 \triangle A_2] = \{1\}$. מצד שני $f[A_1] = f[A_2] = \{1\}$ ולכן $f[A_1] \triangle f[A_2] = \phi \neq \{1\}$.

ו. הוכחה: $x \in f^{-1}[B_1 \triangle B_2] \iff f(x) \in B_1 \triangle B_2 \iff f(x) \in B_1 \setminus B_2 \vee f(x) \in B_2 \setminus B_1 \iff (x \in f^{-1}[B_1] \wedge x \notin f^{-1}[B_2]) \vee (x \in f^{-1}[B_2] \wedge x \notin f^{-1}[B_1]) \iff x \in f^{-1}[B_2] \triangle f^{-1}[B_2]$.

6. תהיינה A, B קבוצות, תהא $f: A \to B$ פונקציה, ונגדיר פונקציה נוספת $g: P(B) \to P(A)$ ע"י:

$$g(X) = f^{-1}[X]$$

הוכיחו: g חח"ע $\iff$ f על.

<u>פתרון:</u>

($\Leftarrow$): נניח g חח"ע ונוכיח ש־f על. יהי $b \in B$ ונניח בשלילה שאין לו מקור, לכן נקבל ש־ $g(\{b\}) = f^{-1}[\{b\}] = \phi$. אבל תמיד מתקיים: $g(\phi) = f^{-1}[\phi] = \phi$ וקיבלנו $g(\phi) = g(\{b\})$ בסתירה לחח"ע של g.

($\Rightarrow$): נניח f על ונוכיח ש־g חח"ע: נניח $g(X) = g(Y)$ ולכן $f^{-1}[X] = f^{-1}[Y]$.
כעת, כיון ש־f על ומתרגיל בית קודם נקבל $X = f[f^{-1}[X]] = f[f^{-1}[Y]] = Y$.