תרגול 10.

הגדרה: תהי $f(z)$ אנליטית בתחום D. נאמר שהנקודה $z_0\in D$ היא אפס מסדר k של f אם $f(z_0)=f'(z_0)=...=f^{(k-1)}(z_0)=0$ אבל $f^{(k)}(z_0)\neq 0$.

הגדרה שקולה: z_0 הוא אפס מסדר k של f, אם ניתן לרשום $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z)$ עבור פונקציה אנליטית $\varphi(z)$ המקיימת $\varphi(z_0)\neq 0$.

דוגמא:

קבעו את סדר האפס של $f(z)=\sin z - z$ בנקודה $z_0=0$.

פתרון: $f(0)=f'(0)=f''(0)=0,\ f'''(0)\neq 0$ ולכן סדר 3. פתרון נוסף יהיה באמצעות טורים.

$$f(z)=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+...-z=-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-+...=z^3\left(-\frac{1}{3!}+\frac{z^2}{5!}-+\right).$$

תרגיל: תהיינה f,g אנליטיות בתחום D. נניח של- f יש אפס מסדר k בנקודה z_0 ול- g אפס מסדר m באותה הנקודה. הוכיחו שלמכפלה $h(z)=f(z)g(z)$ יש אפס מסדר $k+m$ שם.

פתרון: ע"פ ההגדרה השנייה נוכל לרשום $f(z)=(z-z_0)^k\varphi(z),g(z)=(z-z_0)^m\psi(z)$ כאשר φ,ψ אנליטיות, ולא מתאפסות בנקודה. אם כן $f(z)g(z)=(z-z_0)^{k+m}\varphi(z)\psi(z)$ והפונקציה $\varphi\psi$ משחקת כאן את תפקיד הפונקציה האנליטית שאינה מתאפסת.

תרגיל ממבחן:

נגדיר $f(z)=e^z\sin z\cos z$ מצאו את כל האפסים של $f(z)$ ב- $\mathbb{C}$, וקבעו את הסדר של כל אפס. הצדיקו את תשובתכם.

פתרון:

e^z לעולם לא מתאפס, ולכן נבדוק עבור $\sin,\cos$ בנפרד. $\sin z$ מתאפסת בנקודות $\pi k, k\in\mathbb{Z}$ בלבד (הוכחנו). נוכיח שאלו אפסים מסדר 1: הנגזרת הראשונה, $\sin'(z)=\cos(z)$ כבר לא מתאפסת בנקודות אלו (למעשה $\cos(\pi k)=(-1)^k$). $\cos z, e^z$ לא תורמים לאפסים אלו, ולכן ל- f יש אפסים פשוטים (=סדר 1) בנקודות אלו. חישוב דומה עם הקוסינוס מראה שיש גם אפסים פשוטים בנקודות $z=\frac{\pi}{2}+\pi k$. ואלו כל האפסים.

[אפשר היה לקצר את החישוב עם הזהות $\sin 2z = 2\sin z\cos z$]

תרגיל ממבחן: נגדיר $\tan z=\frac{\sin z}{\cos z}=-i\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{e^{iz}+e^{-iz}}$. מצאו את כל האפסים של $\tan z$ ב- $\mathbb{C}$ וקבעו את הסדר של כל אפס.

פתרון:

רק המונה מעניין. $\sin z=0$ בדיוק בנקודות πk, ואין בעיות עם המכנה. מכאן שלפונקציה יש אפסים פשוטים בנקודות $z_k=\pi k$ בלבד. ביתר פירוט, בכל נקודה $z_k=\pi k$ ניתן לרשום $f(z)=(z-\pi k)\varphi_k(z)$ כאשר φ_k אנליטית ולא מתאפסת שם. לכן $f(z)=(z-z_0)\dfrac{\varphi_k(z)}{\cos(z)}$ גם היא בעלת אפס מסדר ראשון שם.

משפט היחידות: יהי $D\subseteq\mathbb{C}$ תחום (קבוצה פתוחה וקשירה), ותהיינה $f,g:D\to\mathbb{C}$ אנליטיות ומקיימות את התנאי הבא: ישנה סדרת נקודות $z_n\in D$ עם גבול $a\in D$ כך שלכל n $f(z_n)=g(z_n)$. אם כך $f(z)=g(z)$ לכל $z\in D$.

המשפט הזה מסביר למה הנוסחאות מטריגו', כמו $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$ עובדות גם במישור המרוכב. הפונקציות $f(z)=\sin 2z, g(z)=2\sin z\cos z$ הן אנליטיות בכל המישור, ומתלכדות בציר הממשי. המשפט מחייב שהן יתלכדו בכל המישור.

תרגיל: תהי $f(z)$ אנליטית בעיגול היחידה הפתוח $|z|<1$. נניח כי לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים $f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}$. מצאו את $f(z)$.

פתרון: סדרת הנקודות $z_n=\frac{1}{n}$ מתכנסת בעיגול היחידה הפתוח (וגבולה אפס). ננסה לבנות פונקציה אנליטית נוספת $g(z)$ שמתלכדת עם $f(z)$ בנקודות אלו.

אנו רוצים ש- $g\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n+1}=\dfrac{1}{\frac{1}{1/n}+1}$. ננסה $g(z)=\dfrac{1}{\frac{1}{z}+1}=\dfrac{z}{z+1}$. זוהי אכן אנליטית, ומתלכדת עם f בסדרת הנקודות $\frac{1}{n}$. ע"פ משפט היחידות $f(z)\equiv g(z)$ בכל העיגול. כלומר $f(z)=\dfrac{z}{z+1}$.

תרגיל: לכל $z\in\mathbb{C}$ חשבו את האינטגרל $\int_0^{2\pi}e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta)\,d\theta$

פתרון: נסמן $f(z)=\int_0^{2\pi}e^{z\cos\theta}\cos(z\sin\theta)\,d\theta$. בתרגילי הבית הוכחנו שלכל $k\in\mathbb{R}$ $f(k)=2\pi$. כלומר הפונקציה f והפונקציה האנליטית $g(z)=2\pi$ מתלכדות על הציר הממשי. כדי להשתמש במשפט צריכים להוכיח ש-$f(z)$ אף היא אנליטית. אבל זה ברור שיש לה נגזרת בכל נקודה! לכן $f(z)=2\pi$ לכל $z\in\mathbb{C}$.

נקודות סינגולריות מבודדות:

תהי $f(z)$ אנליטית בסביבה מנוקבת של הנקודה z_0. ישנם ארבעה מצבים.

0) $f(z)$ אנליטית גם בנקודה z_0 (לא מעניין)

1) $f(z)$ אינה מוגדרת בנקודה z_0, אך קיים הגבול $\lim_{z\to z_0} f(z)\in\mathbb{C}$ (סליקה).

2) $\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$ או באופן שקול $\lim_{z\to z_0}\frac{1}{f(z)}=0$ (קוטב)

3) לא קיים הגבול בנקודה. (סינגולריות עיקרית).

תרגיל ממבחן: תהי $f(z)$ פונקציה שלמה ולא קבועה, ונניח ש- $f(z)\neq 0$ לכל $z\in\mathbb{C}$. הוכיחו של- f קיימת סינגולריות עיקרית ב- ∞. זאת אומרת $\lim_{z\to\infty} f(z)$ אינו קיים, אפילו במובן הרחב.

פתרון: נניח בשלילה שקיים הגבול $\lim_{z\to\infty} f(z)=L$. ונחלק לשני מקרים:

א. הגבול L הוא סופי. אם כך, ניקח $\varepsilon=1$ בהגדרת הגבול ונסיק שקיים איזה R_0 כך שלכל $|z|>R_0$ מתקיים $|f(z)-L|<\varepsilon=1$ ע"י א"ש המשולש ההפוך מקבלים $\big||f(z)|-|L|\big|<1$ ומכאן $|f(z)|<1+|L|$ מחוץ לעיגול ברדיוס R_0. כלומר $f(z)$ חסומה שם. העיגול $|z|\le R_0$ קומפקטי ולכן f חסומה גם בו (כי היא רציפה). נאמר $|f(z)|\le M$ לכל $|z|\le R_0$. המקסימום $\max(M,|L|+1)$ חוסם את הפונקציה בכל המישור. אבל f שלמה ולכן ליוביל ייתן שהיא קבועה. זה לא ייתכן, כי זה סותר את הנתון.

ב. $L=\infty$. במקרה זה נגדיר $g(z)=\frac{1}{f(z)}$ (ההגדרה היא חוקית ע"פ הנתון). עכשיו $g(z)$ היא בעצמה פונקציה שלמה, לא קבועה ובעלת גבול $\lim_{z\to\infty} g(z)$ סופי. ההוכחה ממקרה א' תתן $g=const$ אבל זו גם תהיה סתירה.

הגדרה: אומרים של- $f(z)$ קוטב מסדר m בנקודה z_0 אם ל- $\frac{1}{f(z)}$ יש אפס מסדר m שם.

באופן שקול ניתן לרשום $f(z)=\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m}$.

תרגיל ממבחן: נניח $r(z),f(z),g(z),h(z)$ הן פונקציות אנליטיות בסביבת z_0. כמו כן ל- f אפס מסדר 1 ב- z_0, ל- g אפס מסדר 4 ב- z_0, ל-h אפס מסדר 2, ול-r אפס מסדר 3. מהו סוג הסינגולריות של $\frac{f(z)+g(z)}{h(z)+r(z)}$ בנק' z_0 ?

פתרון: קוטב פשוט. נרשום

$$f(z)=(z-z_0)\varphi(z), g(z)=(z-z_0)^4\psi(z), h(z)=(z-z_0)^2\chi(z), r(z)=(z-z_0)^3\eta(z)$$

ונציב בשבר.