תרגיל בית 5

שאלה 1

מצא פתרון כללי של כל אחת מהמערכות הלא הומוגניות הבאות:

(א) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-2t} \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 - 2e^{t} \end{cases}$, (ב) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \cos t \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + \sin t \end{cases}$.

פתרון שאלה 1

(א) $\begin{cases} x_1' = x_1 + x_2 + e^{-2t} \\ x_2' = 4x_1 - 2x_2 - 2e^{t} \end{cases}$

הערכים העצמיים של המערכת הם $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$. נחפש פתרון פרטי בצורה $x_p = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} C \\ D \end{pmatrix} e^{-t}$. מההצבה של x_p במערכת נקבל

$\begin{cases} -2Ae^{-2t} + Ce^{t} = Ae^{-2t} + Be^{-2t} + Ce^{t} + De^{t} + e^{-2t} \\ -2Be^{-2t} + De^{t} = 4Ae^{-2t} - 2Be^{-2t} + 4Ce^{t} - 2De^{t} - 2e^{t} \end{cases}$ או $\begin{cases} -2A = A + B + 1 \\ C = C + D \\ -2B = 4A - 2B \\ D = 4C + 2D - 2 \end{cases}$ לכן

$A = 0, B = -1, C = \frac{1}{2}, D = 0$ ו- $x_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{-2t} + \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{-t}$. הפתרון הכלי הוא $x = x_h + x_p$

ואז $\begin{cases} x_1 = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-3t} + \frac{1}{2} e^{t} \\ x_2 = c_1 e^{2t} - 4c_2 e^{-3t} - e^{2t} \end{cases}$.

(ב) $\begin{cases} x_1' = 2x_1 - 5x_2 - \cos t \\ x_2' = x_1 - 2x_2 + \sin t \end{cases}$,

הפתרון הכללי של המערכת ההומוגנית

$x = c_1 \begin{pmatrix} 2\cos t - \sin t \\ \cos t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 2\sin t + \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$. נחפש פתרון פרטי בצורה

$x_p = \begin{pmatrix} At \\ Bt + C \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} Dt + E \\ Ft \end{pmatrix} \sin t$ כי הערכים העצמיים הם $\lambda = \pm i$. כאן ניתן לאפס את האיברים החופשיים למשל עבור x_1 ו- $\cos t$ (הביטוי זה נכלל בפתרון כללי של מערכת הומוגנית). מאותה סיבה ניתן לאפס את האיבר החופשי עבור x_2 ו- $\sin t$. כדי להגדיר את המקדמים הלא מוגדרים נציב את x_p במערכת ונשווה את המקדמים של הפונקציות $t\cos t, t\sin t, \cos t, \sin t$ בשתי המשוואות.

הפתרון של המערכת של משוואות ליניאריות עבור A, B, C, D, E, F הוא

$A = 2, B = 1, D = -1, C = E = -\frac{1}{2}, F = 0$ ו- $x_p = \begin{pmatrix} 2t \\ t - \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -t - \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \sin t$ והפתרון הכללי של

המערכת המקורית הוא $\begin{cases} x_1 = (2c_1 + c_2)\cos t + (-c_1 + 2c_2)\sin t + 2t\cos t - t\sin t - \frac{1}{2}\sin t \\ x_2 = c_1 \cos t + c_2 \sin t + t\cos t - \frac{1}{2}\cos t \end{cases}$.

<u>**שאלה 2**</u>

מצא פתרון פרטי של אחת מבעיות ההתחלה הבאות:

(א) $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, x(0) = 5 \\ y' = 2x - y - 2\cos t, y(0) = 5 \end{cases}$, (ב) $\begin{cases} x' = 7x + 9y + e^t, x(0) = 0 \\ y' = -4x - 5y + 2e^t, y(0) = 0 \end{cases}$

<u>**פתרון שאלה 2**</u>

(א) $\begin{cases} x' = 4x - 3y + \sin t, x(0) = 5 \\ y' = 2x - y - 2\cos t, y(0) = 5 \end{cases}$,

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 2 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,\ \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0\,,\ \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 2\,,$$

$$\lambda_1 = 1\,,\ \begin{cases} 3\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 2\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_1 = \alpha_2\,,\ \alpha_1 = \alpha_2 = 1\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t\,,$$

$$\lambda_2 = 2\,,\ \begin{cases} 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \\ 2\alpha_1 - 3\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_1 = \frac{3}{2}\alpha_2\,,\ \alpha_1 = 3, \alpha_2 = 2\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}\,,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_h = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t}\,,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} B \\ D \end{pmatrix} \sin t\,,\ \begin{cases} -A\sin t + B\cos t = 4A\cos t + 4B\sin t - 3C\cos t - 3D\sin t + \sin t \\ -C\sin t + D\cos t = 2A\cos t + 2B\sin t - C\cos t - D\sin t - 2\cos t \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = 4A - 3C \\ D = 2A - C - 2 \\ -A = 4B - 3D + 1 \\ -C = 2B - D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \\ C = 2 \\ D = -2 \end{cases},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \sin t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \sin t\,,$$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 1 = 5 \\ c_1 + 2c_2 + 2 = 5 \end{cases},\ \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = 1 \end{cases},\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cos t + c_2 \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \sin t\,,$$

$$\begin{cases} x = e^t + 3e^{2t} + \cos t - 2\sin t \\ y = e^t + 2e^{2t} + 2\cos t - 2\sin t \end{cases},$$

(ב) $\begin{cases} x' = 7x + 9y + e^t, x(0) = 0 \\ y' = -4x - 5y + 2e^t, y(0) = 0 \end{cases}$

$$\begin{vmatrix} 7-\lambda & 9 \\ -4 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0\,,\ \lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0\,,\ \lambda_1 = 1\,,\ \lambda_2 = 1\,,$$

$$\lambda_1 = 1\,,\ \begin{cases} 6\alpha_1 + 9\alpha_2 = 0 \\ -4\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \end{cases},\ \alpha_1 = -\frac{3}{2}\alpha_2\,,\ \alpha_1 = -3, \alpha_2 = 2\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(1)} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t\,,$$

$$\lambda_2 = 1\,,\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} a_1 t + b_1 \\ a_2 t + b_2 \end{pmatrix} e^t\,,\ \frac{d\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)}}{dt} = \begin{pmatrix} a_1 + a_1 t + b_1 \\ a_2 + a_2 t + b_2 \end{pmatrix} e^t\,,$$

$$\begin{cases} a_1 + a_1 t + b_1 = 7a_1 t + 7b_1 + 9a_2 t + 9b_2 \\ a_2 + a_2 t + b_2 = -4a_1 t - 4b_1 - 5a_2 t - 5b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 7a_1 + 9a_2 \\ a_2 = -4a_1 - 5a_2 \\ a_1 + b_1 = 7b_1 + 9b_2 \\ a_2 + b_2 = -4b_1 - 5b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = -\frac{3}{2}a_2 \\ 6b_1 + 9b_2 = a_1 \end{cases},$$

$a_2 = 4, b_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -6, b_1 = -1$, $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}^{(2)} = \begin{pmatrix} -6t-1 \\ 4t \end{pmatrix} e^t$,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_h = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -6t-1 \\ 4t \end{pmatrix} e^t,$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} At^2 + Bt \\ Ct^2 + Dt \end{pmatrix}, \begin{cases} 2At + B + At^2 + Bt = 7At^2 + 7Bt + 9Ct^2 + 9Dt + 1 \\ 2Ct + D + Ct^2 + Dt = -4At^2 - 4Bt - 5Ct^2 - 5Dt + 2 \end{cases},$$

$$\begin{cases} A = 7A + 9D \\ 2A + B = 7B + 9D \\ B = 1 \\ C = -4A - 5C \\ 2C + D = -4B - 5D \\ D = 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 12 \\ B = 1 \\ C = -8 \\ D = 2 \end{cases}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_p = \begin{pmatrix} 12t^2 + t \\ -8t^2 + 2t \end{pmatrix} e^t$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + c_2 \begin{pmatrix} -6t-1 \\ 4t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 12t^2 + t \\ -8t^2 + 2t \end{pmatrix} e^t,$$

$$\begin{cases} -3c_1 - c_2 = 0 \\ 2c_1 = 0 \end{cases}, \begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 = 0 \end{cases}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} e^t + 0 \begin{pmatrix} -6t-1 \\ 4t \end{pmatrix} e^t + \begin{pmatrix} 12t^2 + t \\ -8t^2 + 2t \end{pmatrix} e^t, \begin{cases} x = e^t \left(t + 12t^2 \right) \\ y = e^t \left(2t - 8t^2 \right) \end{cases}.$$