תרגיל 9

19 במאי 2015

1. עבור המטריצה הבאה: $A = \begin{matrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{matrix}$ מצא B משולשית ו P הפיכה, כך ש:
$$P^{-1}AP = B$$

2. הוכח, בעזרת משפט השילוש, שלכל מטריצה שהפולינום האופייני שלה מתפרק לגורמים לינאריים, ה $trace$ שלה שווה לסכום הערכיים העצמיים שלה (כל אחד נספר לפי הריבוי האלגברי שלו), והדטרמיננטה שלה שווה למכפלת הערכים העצמיים (כל אחד נספר לפי הריבוי האלגברי שלו)

3. אילו מהפונקציות הבאות היא ממכפלה פנימית על $\mathbb{R}^2$:

(א) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= 2x_1y_1 + 7x_2y_2$

(ב) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= 2x_1x_2 + 7y_1y_2$

(ג) $\forall \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 :< \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} >= x_1y_1 + x_2y_1 + x_1y_2$

4. יהא V ממ"פ. יהא $B = \{v_1, \dots v_n\}$ בסיס.

(א) יהא $v \in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i, v >= 0$. הוכח $v = 0$

(ב) יהיו $v, u \in V$ כך שלכל i מתקיים $< v_i, v >=< v_i, u >$. הסק כי $v = u$

5. יהא V ממ"פ. תהא $T : V \to V$ ה"ל. הוכח או הפרך:

(א) אם לכל $v \in V$ מתקיים כי $< Tv, v >= 0$ אזי $T = 0$

(ב) תהא S קבוצה פורשת של V. אם לכל $u, v \in S$ מתקיים כי $< Tv, u >= 0$ אז $T = 0$

6. יהא V ממ"פ מעל השדה $\mathbb{F}$ עם נורמה מושרית $||\cdot||$הוכח את הבאים לכל $u, v \in V$:

(א) אם $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ אזי $< u,v >= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2\right)$

(ב) אם $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ אזי $< u,v >= \frac{1}{4}\left(||u+v||^2 - ||u-v||^2 + i||u+iv||^2 - i||u-iv||^2\right)$

בהצלחה!