אינפי 1 החממה - תרגול 5 תשפא

16 בנובמבר 2020

1 גבולות חלקיים

הגדרות:

- תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. תת סדרה שלה היא סדרה מהצורה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, כאשר $n_1 < n_2 < \cdots$. אם קיים הגבול $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k}$, הוא נקרא גבול חלקי של הסדרה.
- הגבול העליון של הסדרה הוא הגבול החלקי הגדול ביותר, מסומן $\overline{\lim}, \limsup$. הגבול התחתון של הסדרה הוא הגבול החלקי הקטן ביותר, מסומן $\underline{\lim}, \liminf$.

משפטים:

- a הוא גבול חלקי של הסדרה a_n אמ"ם לכל סביבה של a יש אינסוף איברי הסדרה בסביבה.
- הסדרה a_n מתכנסת אמ"ם $\overline{\lim} a_n = \underline{\lim} a_n$, ואז זה גם גבול הסדרה.

תרגילים:

1. מצאו $\overline{\lim}, \underline{\lim}$ עבור הסדרות הבאות (ובדקו אם יש גבולות חלקיים נוספים).

(א) $a_n = 2^n$

פתרון: כיון ש־ $a_n \to \infty$ (קל להוכיח לפי הגדרה, לוקחים את N_0 להיות משהו כמו $\log_2(M)$) אז $\overline{\lim} = \underline{\lim} = \infty$.

(ב) $a_n = -5n$

פתרון: כיון ש־ $a_n \to -\infty$ אז $\overline{\lim} = \underline{\lim} = -\infty$.

(ג) $a_n = \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$

פתרון: כידוע $\sin$ נעה בין 1־ ל1. לכן אם נמצא תת סדרה המתכנת ל1 זה יהיה $\limsup$, ואם נמצא ת"ס המכנסת ל-1 זה יהיה $\liminf$. נשים לב:

$$n_k = 4k + 1$$

ואז נקבל:

$$a_{n_k} = \sin\frac{(4k+1)\pi}{2} = \sin\frac{\pi}{2} = 1$$

ועבור $n_k = 4k+3$ נקבל:

$$a_{n_k} = \sin\frac{(4k+3)\pi}{2} = \sin\frac{3\pi}{2} = -1$$

נקבל גם שהסדרה לא מתכנסת. האם יש עוד גבולות חלקיים? כן, עבור $n_k = 2k$ נקבל

$$a_{n_k} = \sin\frac{2\pi k}{2} = \sin\pi k = 0$$

אין גבולות חלקיים נוספים. נב"ש $a \in [-1,1] \setminus \{-1,0,1\}$ גבול חלקי. אז יש תת סדרה $a_{n_k} \to a$.
אם לבסוף $n_k \equiv 1(\mod 4)$ אז $a_{n_k} \to 1$ בסתירה.
אם לבסוף $n_k \equiv 3(\mod 4)$ אז $a_{n_k} \to -1$ בסתירה.
אם לבסוף $a_{n_k} \equiv 0(\mod 2)$ אז $a_{n_k} \to 0$ בסתירה.
אחרת, לבסוף אין משהו קבוע מבין שלושתם, ולכן לפחות 2 משלושתם מתקיימים, ונקבל שיש לפחות 2 גבולות חלקיים ולכן תת הסדרה לא מתכנסת.
באופן יותר קצר: אפשר פשוט להראות שהסדרה נעה בין שלושה ערכים.

(ד) $a_n = (-1)^n n$

פתרון: $\limsup = \infty$ עם $a_{n_k} = a_{2k}$, $\liminf = -\infty$ עם $a_{n_k} = a_{2k-1}$.
אין גבולות חלקיים נוספים: בהינתן ת"ס (תת סדרה): אם יש בה אינסוף אינדקסים זוגיים ומספר סופי של אינדקסים א"ז אז היא מתכנסת לאינסוף. אם יש בה אינסוף אינדקסים א"ז ומספר סופי של אינדקסים זוגיים אז היא מתכנסת למינוס אינסוף. אם יש בה אינסוף משניהם אז היא מתבדרת.

2. מצאו $\overline{\lim}, \underline{\lim}, \sup, \inf$ עבור הסדרות הבאות.

(א) $a_n = (-1)^n\left(5+\frac{1}{n}\right)$

פתרון: עבור $n = 2k$ נקבל תת סדרה מונו' יורדת שקל לראות $a_{2k} \to 5$.
עבור $n = 2k-1$ נקבל תת סדרה מונו' עולה שקל לראות $a_{2k-1} \to -5$.
לכן יש שני גבולות חלקיים $5, -5$ ונקבל:

$$\overline{\lim} a_n = 5, \underline{\lim} a_n = -5$$

בדיקה ידנית תיתן לנו:

$$\sup a_n = 5\frac{1}{2}, \inf a_n = -6$$

(ב) $$a_n = \begin{cases} \frac{n+5}{n+3} & n \in 2\mathbb{N}-1 \\ -\frac{2}{n+2} & n \in 2\mathbb{N} \end{cases}$$

פתרון: מראש קיבלנו סדרה המוגדרת ע"י שני ת"ס (לפי זוגיות האינדקס). לכן גבולות חלקיים יהיו אלה של תת הסדרות. נשים לב:

$$a_{2k} = -\frac{2}{2k+2} = -\frac{1}{k+1} \to 0$$

$$a_{2k-1} = \frac{2k-1+5}{2k-1+3} = \frac{k+2}{k+1} \to 1$$

ולכן:

$$\overline{\lim} a_n = 1, \underline{\lim} a_n = 0$$

$$\sup a_n = 1.5, \inf a_n = -\frac{1}{2}$$

3. תהי a_n סדרה המקיימת $\lim a_n^2 = 1$. מה ניתן לומר על $\lim\sup a_n, \lim\inf a_n$?
פתרון: ± 1. הוכחה: תהי a_{n_k} ת"ס. מהנתון נקבל $a_{n_k}^2 \to 1$ (כי אם סדרה מתכנסת אז כל תת־הסדרות שלה מתכנסות לאותו גבול). נניח שקיים $\lim a_{n_k} = a$ אז לפי אריתמטיקה של גבולות נקבל: $a^2 = \lim a_{n_k}^2 = 1$ ולכן $a = \pm 1$.

4. תהיינה a_n, b_n סדרות המקיימות:

$$\forall n : a_n \le b_n$$

הוכיחו או הפריכו:

(א) $\lim\sup a_n \le \lim\sup b_n$

פתרון: הוכחה: תהי $a_{n_k} \to \lim\sup a_n$. נתבונן בסדרה b_{n_k}, לפי משפט יש לה תת־סדרה מתכנסת $b_{n_{k_j}} \to L \le \lim\sup b_n$. כעת, $a_{n_{k_j}}$ היא ת"ס של a_{n_k} ולכן מתכנסת כמוה ל־$\lim\sup a_n$. קיבלנו שתי סדרות מתכנסות $a_{n_{k_j}}, b_{n_{k_j}}$ כך שלכל n_{k_j} מתקיים: $a_{n_{k_j}} \le b_{n_{k_j}}$, ולכן אי השיוויון נשמר גם בגבולות, ולכן נקבל:

$$\lim\sup a_n = \lim a_{n_{k_j}} \le \lim b_{n_{k_j}} = L \le \lim\sup b_n$$

(ב) $\limsup a_n \le \liminf b_n$
פתרון: הפרכה: ניקח את $a_n = (-1)^n, b_n = (-1)^n + 1$, שמקיימות את התנאי כמובן. ואז:

$$\limsup a_n = 1 > 0 = \liminf b_n$$

(ג) $\liminf a_n \le \liminf b_n$
פתרון: אפשר להוכיח בדומה לסעיף (א). אפשר גם להשתמש בסעיף (א), וכן בעובדה ש־ $\liminf -a_n = -\limsup a_n$ וגם: $\limsup -a_n = -\liminf a_n$.
כעת אם ניקח את הסדרות הפוכות הסימן אז נקבל:

$$\forall n : -b_n \le -a_n$$

מסעיף (א) נקבל:

$$-\liminf b_n = \limsup -b_n \le \limsup -a_n = -\liminf a_n$$

וע"י העברת אגפים נקבל:

$$\liminf a_n \le \liminf b_n$$

2 קריטריון קושי

הגדרה: סדרה a_n נקראת סדרת קושי אם מתקיים:

$$\forall \epsilon > 0. \exists N \in \mathbb{N}. \forall n, m > N : |a_n - a_m| < \epsilon$$

משפט: סדרה ממשית מתכנסת (במובן הצר) אמ"ם היא סדרת קושי.
הוכחה: בהצראה ראיתם $\Rightarrow$. נוכיח את הכיוון השני: ראיתם את שני הכיוונים תרגילים:

1. הוכיחו או הפריכו: סדרה מעל $\mathbb{Q}$ מתכנסת אמ"ם היא סדרת קושי.
פתרון: הפרכה: הסדרה a_n המוגדרת להיות $\sqrt{2}$ חתוך עד המקום ה־n אחרי הנקודה העשרונית, כלומר:

$$a_n = \frac{\lfloor \sqrt{2} \cdot 10^n \rfloor}{10^n}$$

זו סדרה מעל $\mathbb{Q}$ שלא מכנסת מעל $\mathbb{Q}$ כי אילו כן אז היה לה גבול רציונלי a, אבל מעל $\mathbb{R}$ אנחנו יודעים שמתכנסת ל־$\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$ ומיחידות הגבול נקבל $a = \sqrt{2}$ בסתירה.

2. הוכיחו שהסדרה $a_n = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ מתכנסת.

פתרון: נשתמש בתנאי קושי. נראה שזו סדרת קושי: נניח $n > m$, נשים לב שמתקיים:

$$|a_n - a_m| = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} - \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} = \frac{1}{(m+1)^2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} <$$

$$< \frac{1}{m(m+1)} + \frac{1}{(m+1)(m+2)} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} =$$

נשים לב שמתקיים: $\frac{1}{a(a+1)} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a+1}$

$$= \left(\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}\right) + \left(\frac{1}{m+1} - \frac{1}{m+2}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1}\right) + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{m} - \frac{1}{n} < \frac{1}{m} \leq \epsilon$$

יהי $\epsilon > 0$, עבור $N = \left\lceil \frac{1}{\epsilon} \right\rceil$ יודעים שלכל $n, m > N$ מתקיים: $\frac{1}{m}, \frac{1}{n} < \epsilon$, ולכן: לכל $n, m > N$ מתקיים:

$$|a_n - a_m| < \frac{1}{\min\{n, m\}} \leq \epsilon$$

לכן זו סדרת קושי ולכן מתכנסת.

3 המספר e

המספר e מוגדר להיות:

$$e := \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

משפט: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$.

תרגילים:

1. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \left(\frac{n+3}{n+7}\right)^n$

פתרון:

$$a_n = \left(\frac{n+3}{n+7}\right)^n = \left(\frac{n+7-4}{n+7}\right)^n = \left(1 + \frac{-4}{n+7}\right)^n = \left(\underbrace{\left(1 + \frac{-4}{n+7}\right)^{n+7}}_{\to e^{-4}}\right)^{\frac{n}{n+7} \to 1} \to \left(e^{-4}\right)^1 = e^{-4}$$

2. חשבו את גבול הסדרה $a_n = \left(\frac{n^2-5}{n^2-4}\right)^{2n+1}$

פתרון:

$$a_n = \left(\frac{n^2-4-1}{n^2-4}\right)^{2n+1} = \left(\underbrace{\left(1+\frac{-1}{n^2-4}\right)^{n^2-4}}_{\to e^{-1}}\right)^{\frac{2n+1}{n^2-4}\to 0} \to \left(e^{-1}\right)^0 = 1$$