תרגול 5 - חשבון אינפי 3

6 בדצמבר 2016

תקציר

נגזרת כיוונית, משפט הערך הממוצע, מטריצת יעקובי, יעקוביאן, כלל שרשרת, נגזרות חלקיות, משפט שוורץ.

1 נגזרת כיוונית

הגדרה. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. יהי $v\in\mathbb{R}^n$. נגדיר נגזרת לפי וקטור v על ידי

$$f_v\left(a\right)=\lim_{t\to0}\frac{f\left(a+tv\right)-f\left(a\right)}{t}.$$

נגדיר וקטור לפי כיוון v על ידי $f_{\frac{v}{\|v\|}}$.

משפט. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית. אזי לכל $v\in\mathbb{R}^n$, f_v קיימת ומתקיים

$$f_v\left(a\right)=df_a\left(v\right).$$

הוכחה. מתקיים

$$\begin{aligned}
f_v\left(a\right) &= \lim_{t\to0}\frac{f\left(a+tv\right)-f\left(v\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{f\left(a\right)+df_a\left(tv\right)+o\left(tv\right)-f\left(a\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{df_a\left(tv\right)+o\left(tv\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to0}\frac{tdf_a\left(v\right)}{t}+\frac{o\left(tv\right)}{t}\\
&= \lim_{t\to0}df_a\left(v\right)
\end{aligned}$$

□

תרגיל 1. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ פונקציה דיפרנציאבילית. מצאו את הוקטור v מנורמל עבורו df_v מקסימלית בנקודה a.

פתרון: לפי המשפט הקודם מתקיים

$$f_v(a) = df_a(v) = \left\langle \nabla f(a), \frac{v}{\|v\|} \right\rangle \leq \left\langle \nabla f(a), \frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|} \right\rangle.$$

ולכן הוקטור עבורו מתקבל מקסימום הינו $\frac{\nabla f(a)}{\|\nabla f(a)\|}$.

תרגיל 2. תהא פונקציה

$$f(x,y,z) = x\arctan(yz).$$

עבור $a=(1,1,1)$ מצאו את הוקטור מנורמל עבורו f עולה באופן מקסימלי.

פתרון. מהתרגיל הקודם, ידוע לנו שהכיוון עליה המקסימלי הוא בכיוון הגרדיאנט. לכן נמצא את וקטור הנגזרות החלקיות וננרמל אותו.

$$f_x = \arctan(yz)$$
$$f_y = \frac{xz}{1+y^2z^2}$$
$$f_z = \frac{xy}{1+y^2z^2}$$

נציב $(1,1,1)$ונקבל

$$(f_x, f_y, f_z)(1,1,1) = \left(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

והוקטור המנורמל יוצא

$$\frac{16}{4\pi^2+32}(\pi,2,2).$$

2 משפט הערך הממוצע

צורת רישום. תהיינה $a,b\in\mathbb{R}^n$. קטע סגור $[a,b]$ הוא הקבוצה

$$[a,b] = \{a+t(b-a) \,|\, t\in[0,1]\}.$$

משפט. תהי $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ דיפרנציאבילית בכל נקודה של הקטע $[a,b]$. אזי קיימת $c\in[a,b]$כך שמתקיים $f(b)-f(a) = \nabla f(c)(b-a)$.

הוכחה. הראיון הוא להפעיל את משפט הערך הביניים במשתנה אחד. ראשית, נגדיר $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי

$$g(t) = f(a+t(b-a)).$$

נראה שgגזירה ב $[0,1]$. מתקיים

$$\begin{aligned} g(t+h)-g(t) &= f(a+(t+h)(b-a)) - f(a+t(b-a)) \\ &= \nabla f(a+t(b-a)+h(b-a)) - f(a+t(b-a)) \\ &= \nabla f(a+t(b-a))\,h(b-a) + o(h(b-a)) \end{aligned}$$

נשים לב שכל פונקציה שהיא $o\left(h\left(b-a\right)\right)$ היא בהכרח גם $o\left(h\right)$. נרשום

$$\left(\nabla f\left(a+t\left(b-a\right)\right)\left(b-a\right)\right)h=\nabla f\left(a+t\left(b-a\right)\right)h\left(b-a\right)$$

ונקבל

$$g\left(t+h\right)-g\left(t\right)=\left(\nabla f\left(a+t\left(b-a\right)\right)\left(b-a\right)\right)h+o\left(h\right)$$

נחלק ב h ונשאיף לאפס ונבל

$$.g'\left(t\right)=\nabla f\left(a+t\left(b-a\right)\right)\left(b-a\right)$$

ברור ש gרציפה ב 0 ו 1. לכן לפי משפט הערך הממוצע במשתנה אחד קיים t_0 כך ש

$$.g\left(1\right)-g\left(0\right)=g'\left(t_0\right)$$

נציב ונקבל

$$f\left(b\right)-f\left(a\right)=\nabla f\left(a+t_0\left(b-a\right)\right)\left(b-a\right)$$

ניקח $c=\left(a+t_0\left(b-a\right)\right)$. □

תרגיל 3. האם ניתן להכליל את משפט ערך הממוצע לפונצקיות וקטוריות? כלמר האם ניתן להחליף $\mathbb{R}$ ב $\mathbb{R}^m$ במשפט הקודם?

פתרון: לא, נביא דוגמה נגדית. נגדיר

$$.\gamma\left(t\right)=\left(a\cos\omega t,a\sin\omega t,b\omega t\right)$$

נגדיר $t_1=0$ ו $t_2=\frac{2\pi}{\omega}$. נשים לב שמתקיים

$$\gamma\left(t_1\right)=\left(a,0,0\right)$$
$$\gamma\left(t_2\right)=\left(a,0,2\pi b\right)$$

נשים לב שמתקיים

$$.\gamma\left(t_2\right)-\gamma\left(t_1\right)=\left(0,0,2\pi b\right)$$

עכשו נניח שקיים $\tau\in\left(0,\frac{2\pi}{\omega}\right)$. מתקיים

$$.\gamma'\left(\tau\right)=\left(-a\omega\sin\omega\tau,a\omega\cos\omega\tau,b\omega\right)$$

אבל מתקיים $\left(-a\omega\sin\omega\tau,a\omega\cos\omega\tau\right)\neq\left(0,0\right)$ולכן המפשט לא מתקיים.

ראינו שבמימד אחד - יש קשר בין הפרש $f\left(b\right),f\left(a\right)$ אורך הקטע $[a,b]$והנגזרת של f. נשאלת השאלה - האם ניתן להכליל את הטענה למימדים יותר גבוהים? למשל - האם יש קשר בין הערכים של הפונקציה על קודקודיו של המלבן לשטח שלו והנגזרות?

תרגיל 4. נניח ש f מוגדרת על קבוצה פתוחה $E\subseteq\mathbb{R}^2$. נניח ש f_x ו f_{xy} קיימים בכל נקודה של E. נניח ש $Q\subseteq E$ הוא מלבן סגור אם צדדיים מקבילים לצירי הקוארדינטות, כך ש $\left(a,b\right)$ו $\left(a+h,b+k\right)$הם קודקודים מנוגדים $h,k>0$. נגדיר

$$.\Delta\left(f,Q\right)=f\left(a+h,b+k\right)-f\left(a+h,b\right)-f\left(a,b+k\right)+f\left(a,b\right)$$

אזי קיימת נק' $\left(c,d\right)$ פנימית של Eכך ש $\Delta\left(f,Q\right)=hkf_{xy}\left(c,d\right)$.

פתרון: נגדיר $u(t)=f(t,b+k)-f(t,b)$. נשים לב ש

$$\Delta(f,Q)=u(a+h)-u(a)$$

מכיוון ש u גזירה ורציפה, על פי משפט ערך הממוצע קיים $c\in[a,a+h]$ כך ש

$$\begin{aligned}\Delta(f,Q)&=u(a+h)-u(a)\\&=ku'(c)\\&=k(f_x(c,b+k)-f_x(c,b))\\&=kh(f_{xy}(c,d))\end{aligned}$$

3 קירובים בעזרת דיפרנציאל

נזכיר ונחדד הגדרה שכבר השתמשנו בו בהגדרה של דיפרנציאל.

הגדרה. נאמר ש f זניח ביחס ל v ונסמן $f=o(v)$ אם מתקיים

$$\lim_{\|v\|\to 0}\frac{\|f\|}{\|v\|}=0$$

למעשה, הסימון המדוייק הוא $f\in o(v)$ ולא $f=o(v)$. את הסימון

$$f(a+v)=f(a)+df_a(v)+o(v)$$

צריך להבין כך

$$\begin{aligned}&f(a+v)=f(a)+df_a(v)+g(v).\\&g\in o(v)\end{aligned}$$

שוב, מטעמים "מסורתיים" נרשום את הסימון המקובל $f=o(v)$ אבל צריך להבין את המשמעות המתמטית.

כזכור, אם פונקציה f דיפנרציאבילית, ההפרש $f(a+v)-f(a)-df_a(v)$ זניח ביחס ל v.

$$f(a+v)-f(a)-df_a(v)=o(v).$$

העובדה הזאת מאפשרת לנו לקרב פונקציות בעזרת דיפרנציאל. כרגע, לא נחשב את השגיאה. על מנת להעריך את השגיאה באופן מדוייק, נצטרך שארית טיילור שנלמד בהמשך. השיטה דומה לקירוב בעזרת נגזרת . על מנת לקרב את ערך הפונקציה f בנקודה x אנחנו נחפש נקודה קרובה a שבה ערך $f(a)$ ידוע ואז נשתמש בקירוב

$$f(x)\approx f(a)+df_a(x-a)$$

תרגיל 5. תוך שימוש בדיפרנציאל קרבו את הביטוי $\sin 29^\circ \tan 46^\circ$.

פתרון: נמיר את הביטוי לרדיאנים.

$$29^\circ = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}$$
$$46^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}$$

הפונקציה מן הסתם תהיה $f(x,y) = \sin x \tan y$ והנקודה שניקח $(x,y) = \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)$. נקרבב בעזרת

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) &\approx f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) + df_{\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)} \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{180} \\ \frac{\pi}{180} \end{pmatrix} \\ &= f\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) + \left(f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right), f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\right) \begin{pmatrix} -\frac{\pi}{180} \\ \frac{\pi}{180} \end{pmatrix} \\ &= \sin\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4} - f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} + f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} \\ &= \frac{1}{2} - f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} + f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} \end{aligned}$$

נחשב את הנגזרות החלקיות.

$$f_x = \cos x \tan y \Rightarrow f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$f_y = \frac{\sin x}{\cos^2 y} \Rightarrow f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

נציב ונקבל

$$\begin{aligned} f\left(\frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{180}, \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right) &\approx \frac{1}{2} - f_x\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} + f_y\left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right)\frac{\pi}{180} \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\pi}{180} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{180} \\ &\approx \frac{1}{2} + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)\frac{11}{630} \end{aligned}$$

4 כלל שרשרת

כלל שרשרת נותנת את הקשר בין פונקציות דיפרנציאליות f ו g והדיפרנציאל שלהן. אנחנו נשתמש בו בעיקר על מנת

1. להראות שפונ' דיפרנציאבילית
2. לחשב דיפרנציאלים ונגזרות חלקיות של פונ' מסובכות - למשל במקרים של פונ' שלא ניתנות באופן מפורש.
3. שימושים תאורתיים - בהוכחות של חלק מהמשפטים.

אז מה הכלל אומר?

משפט. יהיו $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $B \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצות פתוחות, $f : A \to \mathbb{R}^n$ פונקציות דיפרנציאבילית ב $a \in A$, $g : B \to \mathbb{R}^k$ פונקציה דיפרנציאיבילית ב $f(a)$. אזי $g \circ f$ דיפרנציאבילית ב a ומתקיים

$$g \circ f(a) = dg_{f(a)} \circ df_a.$$

נזכיר, שלכל העתקה לינארית קיימת מטריצה מייצגת. מכיוון שדיפרנציאל הוא העתקה לינארית, גם לו יש מטריצה מייצגת. המטריצה המייצגת של דיפרציאל נקראת מטריצת יעקובי.

צורת רישום. תהי $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה דיפרנציאבילית ב $a \in A$. המטריצה המייצגת של df_a נקראת מטריצת יעקובי של f ב a ומסומנת על ידי $D_a(f)$,$\nabla f(a)$ או $J_a(f)$.מתקיים ()

$$D_a(f) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}.$$

כלל שרשרת נותן לנו את הקשר הבא בין מטריצות יעקובי

$$D_a(g \circ f) = D_{f(a)}(g)\, D_a(f).$$

זה פשוט נובע מהעובדה באלגברה לינארית שהקשר שמטריצה מייצגת של הרכבת העתקות הינה כפל של המטריצות המייצגות.

הנוסחה עם המטריצות מאפשרת לחשב בפועל את הדיפרנציאלים והנגזרות החלקיות. בפרט, אם $f = u \circ x(t)$ היא פונקציה ממשית (מקבלת ערכים ב $\mathbb{R}$), דהיינו

$$f(a_1, \ldots, a_m) = u(x_1(a_1, \ldots, a_m), \ldots, x_n(a_1, \ldots a_m))$$

אז הנגזרות החלקיות נתונות על ידי

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j}(x(a))\, \frac{\partial x_j}{\partial t_i}(a).$$

לעיתים, לצורך נוחות של רישום, כאשר ההקשר ברור, נשמיט את הנקודות ונרשום פשוט

$$\frac{\partial f}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t_i}.$$

על מנת לראות זאות, נשים לב ש $\frac{\partial f}{\partial t_i}$ הוא פשוט העמודה ה i של מטריצת יעקובי $D_a f = \left(\frac{\partial f}{\partial t_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial t_m}\right)(a)$, כלמר הרכיב i של המטריצה ונחשב אותו

ישירות על

$$\begin{aligned}
D_a(f) &= D_a(u\circ x) = D_{x(a)}(u)\circ D_a(x)\\
&= \left(\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_1}{\partial t_m}\\ \vdots & & \vdots\\ \frac{\partial x_n}{\partial t_1} & \cdots & \frac{\partial x_n}{\partial t_m}\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

על ידי כפל שורה-עמודה נקבל את הביטוי שרשמנו.

תרגיל 6. חשבו את $\left.\frac{dw}{dt}\right|_{t=1}$ כאשר

$$w = x^3y^2z^4$$

ו

$$.\,(x,y,z) = \left(t^2, t+2, 2t^4\right)$$

בעזרת כלל שרשרת:

$$\begin{aligned}
\frac{dw}{dt} &= D_{(1,3,2)}(w)\cdot D_{(1)}(x,w,z)\\
&= \left(3x^2y^2z^4, 2x^2yz^4, 4x^3y^2z^3\right)\Big|_{(1,3,2)}\begin{pmatrix}2t\\1\\8t^3\end{pmatrix}\Big|_{t=1}\\
&= (432, 96, 288)\begin{pmatrix}2\\1\\8\end{pmatrix}\\
&= 864+96+2304\\
&= 3264
\end{aligned}$$

תרגיל 7. חשבו את $dg_a(h)$ כאשר

$$\begin{aligned}
g &= \phi\circ f\\
a &= (1,1)\\
h &= (3,2)\\
f(x,y) &= \left(x^2+xy+1, y^2+2\right)\\
.\phi(u,v) &= \left(u+v, 2u, v^2\right)
\end{aligned}$$

פתרון: הנגזרות החלקיות של כל הפונקציות קיימות ורציפות ולכן הן דיפרנציאיביליות. נחשבת את הדיפנצאיל בעזרת כלל שרשרת.

$$\begin{aligned}
D_{(u,v)}(\phi) &= \begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 2v\end{pmatrix}\\
D_{(x,y)}(f) &= \begin{pmatrix}2x+y & x\\ 0 & 2y\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

כמו כן, אם נציב $(3,3)$ $(u,v)=f(1,1)=$ נקבל

$$D_{(1,1)}(f)=\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}$$

$$D_{(3,3)}(\phi)=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&6\end{pmatrix}$$

בנוסף, מתקיים

$$dg_a(h)=D_a(g)\,h=D_{f(a)}(\phi)\,D_a(f)$$

נציב את a ואת h ונקבל

$$\begin{aligned}D_{(1,1)}(g)\,h&=\begin{pmatrix}1&1\\2&0\\0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}3&3\\6&2\\0&12\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}15\\22\\24\end{pmatrix}\end{aligned}$$

תרגיל 8. חשבו את מטריצת יעקובי של $g=f\circ\phi$ בנקודה $(0,0)$ כאשר נתון ש

$$\phi(x,y)=\left(\frac{1}{2}\left(e^y+\cos x\right),\frac{1}{2}\left(e^x+\cos y\right)\right)$$

ו f דיפרנציאבילית ב $(1,1)$ עם מטריצת יעקבובי שלה בנקודה היא $\begin{pmatrix}3&2\\1&3\end{pmatrix}$.

שוב, ϕ דיפרנציאיבילית בכל רכיב וכסכום / מכפלה/ הרכבה של דיפרנציאיביליות, ולכן דיפרנציאבילית. כמו כן, $\phi(0,0)=(1,1)$ ולכן g דיפרנציבילית ב $(0,0)$ כהרכבה של דיפרנציאיביליות. על מנת למצוא את מטריצת יעקובי שלה נשתמש בכלל שרשרת.

$$\begin{aligned}D_{(0,0)}(g)&=D_{(0,0)}(f\circ\phi)\\&=D_{\phi(0,0)}(f)\,D_{(0,0)}(\phi)\end{aligned}$$

נחשב את $D_{(0,0)}(\phi)$.

$$D_{(x,y)}(\phi)=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-\sin x&e^y\\e^x&-\sin y\end{pmatrix}.$$

נציב $(0,0)$ ונקבל

$$D_{(0,0)}(\phi)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}.$$

ולכן מתקיים

$$\begin{aligned} D_{(0,0)}(g) &= D_{\phi(0,0)}(f)\, D_{(0,0)}(\phi) \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$