אינפי 1 תרגיל 9 פתרון

26 בדצמבר 2014

1. א. נסתכל על הפולינום $f(x) = x^3 + x^2 - 1$ בקטע $[0,1]$. אננו מחפשים את מספר השורשים של הפולינום בקטע הנתון. נבדוק את הערכים בקצוות. $f(0) = -1$, $f(1) = 1$. לכן לפי משפט ערך הביניים יש לפונקציה לפחות שורש אחד בקטע.

$f'(x) = 3x^2 + 2x$. נבדוק מתי הנגזרת מתאפסת. $f'(x) = 0$ כאשר $3x^2 + 2x = 0$ וזה קורה עבור $x = 0, -\frac{2}{3}$. כלומר, הנגזרת לא מתאפסת בקטע $(0,1)$ ולכן הפונקציה רק עולה או רק יורדת בתחום הזה, לכן היא לא יכולה לחתוך את ציר הxיותר מפעם אחת.

מספר הפתרונות של המשוואה בתחום בנתון הוא 1.

(יש לציין שהפונקציה רציפה בתחום, ולכן ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים).

ב. נסתכל על הפונקציה $f(x) = e^x - 10x$. נבדוק את ערכי הפונקציה בקצות הקטע. $f(0) = 1, f(10) = 21,926.46$ כלומר, $f(0), f(10) > 0$. ניתן לראות ש$f(2) = -12.6 < 0$, לכות לפי משפט ערך הביניים יש לפונקציה פתרון בקטע $(0,2)$ ובקטע $(2,10)$. כלומר, יש לפחות שתי פתרונות בקטע $(0,10)$. כעת נבדוק מתי הנגזרת מתאפסת. $f'(x) = e^x - 10 = 0$ רק כאשר $x = \ln 10 = 2.3$. לפונקציה יש נקודת קיצון אחת לכל היותר בתחום, ולכן היא לא יכולה לחתוך את ציר הxיותר מפעמיים. לכן, מספר הפתרונות של המשוואה בתחום הוא בדיוק 2.

(ושוב, יש לשים לב שהפונקציה רציפה בתחום ולכן ניתן להשתמש במשפט ערך הביניים)

2. נסתכל על הפונקציה $g(x) = f(x + \frac{a}{2}) - f(x)$. נבדוק את ערכי הפונקציה בקצוות. $g(0) = f(\frac{a}{2}) - f(0)$, $g(\frac{a}{2}) = f(a) - f(\frac{a}{2})$. נתון ש$f(0) = f(a)$, ולכן $g(0) = -g(\frac{a}{2})$. מזה נובע ש: או $g(0) < 0, g(\frac{a}{2}) > 0$ או $g(0) > 0, g(\frac{a}{2}) < 0$. בכל מקרה נקבל ש0 נמצא בין $g(0)$ל $g(\frac{a}{2})$ ולכן לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in (0, \frac{a}{2})$ כך ש $g(c) = 0$. כלומר, $f(c + \frac{a}{2}) - f(c) = 0 \Longleftarrow f(c + \frac{a}{2}) = f(c)$.

גם פה יש לציין ש$f(x+\frac{a}{2})$ רציפה כהרכבה של פונקציות רציפות, ו$g(x)$ כסכום של פונקציות רציפות.

3. נשים לב ש $f(x)$ רציפה בתחום $[0,8]$ וגזירה ב$(0,8)$. כמו כן $f(0)=f(8)=0$ ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c\in(0,8)$ כך ש$f'(c)=0$.

4. א. קודם כל נשים לב שפולינום תמיד רציף על כל $\mathbb{R}$. נניח ש a,b הם שורשים של הפולינום f. כלומר, $f(a)=f(b)=0$. לפי משפט רול יש נקודה $a<c<b$ כך ש $f'(c)=0$. כלומר, c היא שורש של הנגזרת.

ב. תהי $f=ax^2+bx+c$ משוואה ממעלה שניה ונניח בשלילה כי יש לה לפחות 3 פתרונות. כלומר, קיימים $a<b<c$ כך ש $f(a)=f(b)=f(c)=0$. לפי הטענה הקודמת קיים פתרון לנגזרת בין a ל b, וכן בין b ל c. כלומר, לנגזרת יש לפחות שני פתרונות שונים (הם בהכרח שונים כי אחד מהם גדול מb והשני קטן מ b) אבל הנגזרת היא פולינום ממעלה ראשונה, וידוע שלמשוואה ממעלה אחת יש רק שורש אחד: $f'(x)=2ax+b=0$ רק עבור $x=-\frac{b}{2a}$. וזאת סתירה!

לכן, למשוואה ממעלה שניה יש לכל היותר שני פתרונות.

5. א. $\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

נציב מספר אינפיניטיסימלי חיובי כלשהו בפונקציה. $f(\Delta x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$. $\sqrt[3]{\Delta x}$ הוא גם מספר אינפיניטיסימלי חיובי, ולכן $\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ הוא מספר אינסופי חיובי. כלומר,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=\infty$$

ב. $\lim_{x\to 0-}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$

נציב מספר אינפיניטיסימלי שלילי כלשהו בפונקציה. $f(\Delta x)=\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$. $\sqrt[3]{\Delta x}$ הוא גם מספר אינפיניטיסימלי שלילי, ולכן $\frac{1}{\sqrt[3]{\Delta x}}$ הוא מספר אינסופי שלילי. כלומר,

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{\sqrt[3]{x}}=-\infty$$

ג. $\lim_{x\to\infty}e^x\cos x$

נציב מספר אינסופי חיובי מהצורה $H=2\Pi N$ עבור N מספר היפר שלם אינסופי.

$f(H)=e^H\cos 2\Pi N=e^H\cdot 1=e^H$. כלומר, זה מספר אינסופי חיובי. (הוכחתם באחד מהבחנים לדוגמא שאם H אינסופי חיובי אז גם e^H אינסופי חיובי.)

מצד שני, נבחר $H=2\Pi N+\frac{\Pi}{2}$, עבור N היפר שלם.

$$f(H) = e^{2\Pi N + \dfrac{\Pi}{2}} \cos 2\Pi N + \frac{\Pi}{2} = e^{2\Pi N + \dfrac{\Pi}{2}} \cdot 0 = 0$$

כלומר, קיבלנו תוצאה שונה עבור בחירת Hים שונים, ולכן הגבול הנ"ל לא קיים.

במהלך ההוכחה השתשנו בעובדה שמספרים היפר־ שלמים מקיימים את כל התכונות של המספרים השלמים.

א. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \sin \frac{1}{x}$

נבחר מספר אינפיניטיסימלי: $\epsilon = \dfrac{1}{2\Pi N}$ עבור Nהיפר־ שלם. (זהו אכן מספר אינפיניטיסימלי כי N הוא מספר אינסופי ולכן $2\Pi N$, וידוע שההופכי של מספר אינסופי הוא אינפיניטיסימלי.9

$$\sin \frac{1}{\epsilon} = \sin 2\Pi N = 0$$

מצד שני, נבחר $\epsilon = \dfrac{1}{2\Pi N + \dfrac{\Pi}{2}}$ גם זה מספר אינפיניטיסימלי.

$$\sin \frac{1}{\epsilon} = \sin 2\Pi N + \frac{\Pi}{2} = 1$$

קיבלנו תוצאות שונות עבור ϵים שונים, ולכן הגבול לא קיים.

ה. $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} 4x^2 + 6x + 2$

נציב בפונקציה מספר אינסופי שלילי.

$f(-H) = 4(-H)^2 + 6(-H) + 2 = 4H^2 - 6H + 2 = H(4H - 6 + \dfrac{2}{H})$ מספר אינסופי חיובי פחות מספר סופי הוא עדיין מספר אינסופי חיובי, כנ"ל לגבי הוספה של מספר אינפיניטיסימלי, לכן $4H - 6 + \dfrac{2}{H}$ הוא מספר אינסופי חיובי. מכפלה של שני מספרים אינסופיים חיוביים היא מספר אינסופי חיובי, לכן התוצאה כולה היא מספר אינסופי חיובי.

$$\lim_{x \to -\infty} 4x^2 + 6x + 2 = \infty$$

ו. $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}$

נציב בפונקציה מספר אינפיניטיסימלי.

$f(\Delta x) = \dfrac{1}{\Delta x^2} - \dfrac{1}{\Delta x} = \dfrac{1 - \Delta x}{\Delta x^2}$ קיבלנו מספר סופי חיובי חלקי מספר אינפיניטסימלי לכן התוצאה היא מספר אינסופי חיובי.

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \infty$$

ז. $\displaystyle\lim_{x \to \infty} \sin \frac{1}{x}$

נציב בפונקציה מספר אינסופי חיובי.

$f(H)=\sin\dfrac{1}{H}$ קיבלנו סינוס של מספר אינפיניטיסימלי, שאנחנו כבר יודעים שהחלק הסטנדרי של הביטוי הזה הוא 0. לכן,

$\lim_{x\to\infty}\sin\dfrac{1}{x}=0$

ח. $\lim\limits_{x\to 0} x\cos\dfrac{1}{x}$

אנציב בפונקציה מספר אינפיניטיסימלי.

$f(\Delta x)=\Delta x\cos\dfrac{1}{\Delta x}$. אנחנו יודעים ש $\cos\dfrac{1}{\Delta x}$הוא מספר סופי. כלומר, יש לנו מספר אינפיניטיסימלי כפול מספר סופי שזה מספר אינפיניטיסימלי. לכן,

$\lim_{x\to 0}x\cos\dfrac{1}{x}=0$

6.א. נניח ש$\lim\limits_{x\to c}f(x)=0$. זה אומר שלכל Δx, $f(c+\Delta x)$ הוא מספר אינפיניטיסימלי.

בנוסף, ידוא שלכל x, $f(x)>0$ ולכן $f(c+\Delta x)$ הוא ביטוי אינפיניטיסימלי חיובי.

בשביל לחשב $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}$ צריך להציב בפונקציה $c+\Delta x$ ונקבל: $\dfrac{1}{f(c+\Delta x)}$ הוא תמיד ההופכי של מספר אינפיניטיסימלי חיובי, ולכן הוא מספר אינסופי חיובי. כלומר,

$\lim\limits_{x\to c}\dfrac{1}{f(x)}=\infty$.

ב. לא. נסתכל למשל בפונקציה $f(x)=x$. כמובן שלא מתקיים $f(x)>0$ לכל x.

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ אולם $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{f(x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x}$ לא קיים כי הגבולות החד צדדיים שונים.

$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=\infty$ ואילו $\lim_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$.