תרגיל 1 - פתרון

<u>שאלה 1</u>

חשב את האינטגרלים הבאים באמצעות סכומי רימן:

א. $\int_2^5 x^2 dx$

ב. $\int_1^3 \left(x^2 - x - 2\right)dx$

ג. $\int_2^5 \left(8x - x^2\right)dx$

ד. $\int_{-1}^2 x^3 dx$

<u>פתרון:</u>

א. נשתמש ב $\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$

$$\Rightarrow a_k = 2 + k \cdot \frac{3}{n}$$

$$\Rightarrow \int_2^5 x^2 dx = \lim \sum_{k=1}^n \left(2 + \frac{3k}{n}\right)^2 \cdot \frac{3}{n} = 39$$

ב.

נבחר חלוקה שווה כך ש- $\Delta x = \frac{3-1}{n} = \frac{2}{n}$. בכל תת קטע נבחר נקודת קצה ימני בתור α_k, כלומר $\alpha_k = 1 + \frac{2k}{n}$ ונקבל

$$\int_1^3 \left(x^2 - x - 2\right)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^n \left(\left(1 + \frac{2k}{n}\right)^2 - \left(1 + \frac{2k}{n}\right) - 2\right)\frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} \sum_{k=1}^n \left(\frac{2k}{n} + \left(\frac{2k}{n}\right)^2 - 2\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=1}^n k + \frac{8}{n^3}\sum_{k=1}^n k^2 - \frac{4}{n}\sum_{k=1}^n 1\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} + \frac{8}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4}{n}n\right) = \frac{4}{2} + \frac{8\cdot 2}{6} - 4 = \frac{2}{3}$$

ג.

$$\Delta x = \frac{5-2}{n} = \frac{3}{n}$$

$$x_k = 2 + k \cdot \frac{3}{n} = 2 + \frac{3k}{n} \qquad f(x_k) = 8\left(2 + \frac{3k}{n}\right) - \left(2 + \frac{3k}{n}\right)^2 = -\frac{9k^2}{n^2} + \frac{12k}{n} + 12$$

$$f(x_k)\Delta x = \left(-\frac{9k^2}{n^2}+\frac{12k}{n}+12\right)\left(\frac{3}{n}\right) = -\frac{27k^2}{n^3}+\frac{36k}{n^2}+\frac{36}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{27k^2}{n^3}+\frac{36k}{n^2}+\frac{36}{n}\right) = -\frac{27}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2 + \frac{36}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k + \frac{36}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= -\frac{27}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{36}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} + \frac{36}{n}\cdot n = -\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+36$$

$$\int_2^5 \left(8x-x^2\right)dx = \lim_{n\to\infty}\left[-\frac{9}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+18\left(1+\frac{1}{n}\right)+36\right] = -\frac{9}{2}(1)(2)+18(1)+36 = 45$$

ד.

$$f(x_k)=\left(\frac{3k}{n}-1\right)^3 \rightarrow f(x_k)=\frac{27k^3}{n^3}-\frac{27k^2}{n^2}+\frac{9k}{n}-1 \qquad \Delta x=\frac{3}{n} \rightarrow x_k=\frac{3k}{n}-1$$

$$f(x_k)\Delta x = \left(\frac{27k^3}{n^3}-\frac{27k^2}{n^2}+\frac{9k}{n}-1\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \frac{81k^3}{n^4}-\frac{81k^2}{n^3}+\frac{27k}{n^2}-\frac{3}{n}$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\Delta x = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{81k^3}{n^4}-\frac{81k^2}{n^3}+\frac{27k}{n^2}-\frac{3}{n}\right) = \frac{81}{n^4}\sum_{k=1}^{n}k^3-\frac{81}{n^3}\sum_{k=1}^{n}k^2+\frac{27}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k-\frac{3}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$

$$= \frac{81}{n^4}\cdot\frac{n^2(n+1)^2}{4} - \frac{81}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{27}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} - \frac{3}{n}\cdot n$$

$$= \frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - \frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right) + \frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) - 3$$

$$\int_{-1}^{2} x^3\, dx = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{81}{4}\left(1+\frac{1}{n}\right)^2-\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)+\frac{27}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)-3\right]$$

$$= \left[\frac{81}{4}(1)^2-\frac{27}{2}(1)(2)+\frac{27}{2}(1)-3\right] = \frac{15}{4}$$

<u>שאלה 2</u>

הוכח: אם $f(x)$ אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, אז $c\cdot f(x)$ גם אינטגרבילית בקטע $[a,b]$, כאשר c הינו קבוע ממשי, ומתקיים:

$$\int_a^b c\cdot f(x)dx = c\int_a^b f(x)dx$$

הוכחה: תהי T חלוקה נורמלית של $[a,b]$, כלומר $\max \Delta x_k = \mu(T) \to 0$

לפי הגדרה של אטינטגרל מסוים נקבל

$$c\int_a^b f(x)dx = c\lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k = \lim_{\mu(T)\to 0} c\sum_{k=1}^{n} f(\alpha_k)\Delta x_k = \lim_{\mu(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} cf(\alpha_k)\Delta x_k = \int_a^b cf(x)dx$$

המעבר הראשון (משמאל ימנה) נכון לפי הגדרה של אינטגרל מסוים (נתון שהפונקציה $f(x)$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$)

המעבר השני- לפי תכונת הגבול

המעבר האחרון – זוהי בדיוק הגדרה של אינטגרל מסוים.

ולכן cf אינטגרבילית ב-$[a,b]$ כדרוש.

שאלה 3

הוכח: אם $f(x)$ רציפה בקטע $[a,a]$ – ואי-זוגית, אז $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$

הוכחה: $f(x)$ רציפה ב-$[-a,a]$ ולכן אינטגרבילית לפי רימן בקטע ולכן האינטגרל $\int_{-a}^{a} f(x)dx$ אינו תלוי בבחירה של חלוקה נורמלית של הקטע $[-a,a]$ וגם לא בבחירת הנקודות α_k בכל תת קטע של החלוקה. לכן נבחר חלוקה נורמלית $T_1: 0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = a$ של הקטע $[0,a]$

ו-$\alpha_k \in [x_{k-1}, x_k]$ כשלהי וכן נבחר חלוקה $T_2: -a = -x_n < -x_{n-1} < -x_{n-2} < \ldots < -x_1 < 0$ של הקטע $[-a,0]$ ו- $-\alpha_k \in [-x_k, -x_{k-1}]$

החלוקה $T = T_1 \cup T_2$ היא חלוקה נורמלית של $[-a,a]$ ולכן לפי הגדרה של אינטגרל מסוים נקבל:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \lim_{\mu(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(f(\alpha_k)\triangle x_k + f(-\alpha_k)\triangle x_k \right) = \lim_{\mu(T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} \left(f(\alpha_k)\triangle x_k - f(\alpha_k)\triangle x_k \right) = 0$$

במעבר האחרון השתמשנו באי זוגיות של הפונקציה.

מש"ל

שאלה 4

האם הפונקציה הבאה הינה אינטגרבילית? נמק את תשובתך.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} < x \le 1 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{3} < x \le \frac{1}{2} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{1}{n}, & \frac{1}{n+1} < x \le \frac{1}{n} \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

פתרון:

הפונקציה הנתונה הינה מונוטונית עולה וחסומה ולכן הינה אינטגרבילית.

שאלה 5

הוכח:

א. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{k+1}} \left(1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k\right) = \frac{1}{k+1}$

ב. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left(\sin\frac{\pi}{n} + \sin\frac{2\pi}{n} + \sin\frac{3\pi}{n} + \cdots + \sin\frac{(n-1)\pi}{n} \right) = \frac{2}{\pi}$

פתרון:

א. נשתמש בפונקציה $f(x)=x^k$ בקטע $[0,1]$ וחלוקת קטע הבאה: $c_k=\frac{k}{n}$. במקרה זה, סכום רימן המתאים הינו:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=n} f(c_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{k=n} f(c_k)\frac{1}{n}\\ &= \sum_{k=1}^{k=n}\left(\frac{k}{n}\right)^k\frac{1}{n}\\ &= \frac{1}{n}\left((\frac{1}{n})^k+(\frac{2}{n})^k+(\frac{3}{n})^k+\cdots+(\frac{n}{n})^k\right)\\ &= \frac{1}{n^{k+1}}\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{k+1}}\left(1^k+2^k+\cdots+n^k\right) &= \int_0^1 x^k\,dx\\ &= \left.\frac{x^{k+1}}{k+1}\right|_0^1\\ &= \frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

ב. נשתמש בפונקציה $f(x)=\sin x$ בקטע $[0,\pi]$ וחלוקת קטע הבאה: $c_k=\frac{k-1}{n}\pi$. במקרה זה, סכום רימן המתאים הינו:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{k=n} f(c_k)\Delta x_k &= \sum_{k=1}^{k=n}\sin(c_k)\frac{\pi}{n}\\ &= \sum_{k=1}^{k=n}\sin\left(\frac{k-1}{n}\pi\right)\frac{\pi}{n}\\ &= \frac{\pi}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)\end{aligned}$$

ולכן

$$\pi\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\cos x\Big|_0^{\pi}=2$$

$$\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left(\sin\frac{\pi}{n}+\sin\frac{2\pi}{n}+\sin\frac{3\pi}{n}+\cdots+\sin\frac{(n-1)\pi}{n}\right)=\frac{2}{\pi}$$