5 תרגול 5

1. יהא $T:\mathbb{C}^{n\times n}\to\mathbb{C}^{n\times n}$ המוגדרת $T(A)=A^t+A$. מצאו את הפ"א והמינימאלי של T, הוכיחו שהיא לכסינה, ומצאו אלכסונית דומה.
פתרון: נחפש ע"ע: $T(A)=\lambda A$ אמ"מ $A^t+A=\lambda A$ אמ"מ $A^t=(\lambda-1)A$
אם Aסימטרית נקבל כי $\lambda=2$ ע"ע וגם ש $T-2I$ מאפס כל מטריצה סימטרית
אם A אנטי סימטרית נקבל $\lambda=0$ ע"ע. וגם ש T מאפס כל מטריצה אנטי סימטרית
לכן x $(x-2)$ מופיע בפ"א ובפ"מ ו $T(T-2I)$ מאפס כל מטריצה סימטרית ומאפס כל מטריצה אנטי סימטרית
כיוון שכל מטריצה $B=B_1+B_2$ עבור B_1 סימטרית ו B_2 אנטי סימטרית נקבל כי $T(T-2I)$ מאפס כל מטריצה
לכן $m_T(x)=x(x-2)$. לכן לכסינה.
בנוסף, הר"ג של 2 $=\frac{n^2-n}{2}+n$ = מימד מרחב המטריצות הסימטריות. הר"ג של 0 $=\frac{n^2-n}{2}$ = מימד מרחב המטריצות האנטי סימטריות.
כיוון שהסכום שלהם הוא n זהו גם הר"א שלהם.
אלכסונית מתאימה לפי ר"א שמצאנו.

2. אם T ה"ל מעל המרוכבים הפיכה. אזי אם T^2 לכסינה אז גם T.
פתרון: דרך m_{T^2}.

3. הראו שהמטריצה $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ נלפוטנטית, ומצאו צורת ז'ורדן שלה.

4. עבור המטריצה $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ מתקיים כי:

(א) פ"א: $p_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^3$.

(ב) פ"מ: $m_A(\lambda)=(\lambda+2)(\lambda-1)^2$.

(ג) ר"ג: $\dim V_1=2, \dim V_{-2}=1$.

(ד) מתקיים:

λ	Alg.=$\#\lambda$	Geo.=# Blocks	Power in m_A = Biggest Block
1	3	2	2
-2	1	1	1

ולכן צורת זורדן של A היא

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -2 \end{pmatrix}$$

5. נתון עבור מטריצה A כי:

(א) פ"א = $p_A(\lambda)=(\lambda-2)^3(\lambda-4)^4$

(ב) פ"מ $m_A(\lambda)=(\lambda-2)^2(\lambda-4)^2$

ולכן נסיק כי מתקיים

λ	Alg.$=\#\lambda$	Geo.$=\#$ Blocks	Power in m_A = Biggest Block
2	3	$\in\{1,2,3\}$	2
4	4	$\in\{1,2,3,4\}$	2

ולכן צורות זורדן האפשריות של A הם

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

או

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & & & & & \\ & 2 & & & & & \\ & & 2 & & & & \\ & & & 4 & 1 & & \\ & & & & 4 & & \\ & & & & & 4 & 1 \\ & & & & & & 4 \end{pmatrix}$$

שימו לב כי אם ר"א של 2 הוא 3 אזי יש לו לכל היותר 3 בלוקים. כיוון שהבלוק הגדול הוא מסדר 2 (כלומר יש שתי 3 "ביחד") אזי מספר הבלוקים הוא לכל היותר 2. בנוסף לא יכול להיות בלוק יחיד כי אז הוא מסדר 3 בניגוד לנתון שהגדול מסדר 2. שיקולים דומים אפשר להפיעיל על ע"ע =4.

6. נתון עבור $A\in\mathbb{F}^{7\times 7}$ ניל' (כלומר קיים k כך ש $A^k=0$) כי: $A^3\neq 0$ ו $rank(A)=5$. מכאן ש

(א) פ"א = $p_A(\lambda)=\lambda^7$ (כי למטריצה ניל' קיים ע"ע בודד =0)

(ב) ומכאן ש- פ"מ $m_A(\lambda)=\lambda^k$ כאשר $k\in\{4,5,6,7\}$ (כי $A^3\neq 0$)

ולכן נסיק כי מתקיים

λ	Alg.$=\#\lambda$	Geo.$=\#$ Blocks	Power in m_A = Biggest Block
0	7	$7-5=2$	k

ולכן צורות זורדן האפשריות של A הם

(א) עבור $k=4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ב) עבור $k=5$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & 0 & 1 \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ג) עבור $k=6$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & \\ & & 0 & 1 & & & \\ & & & 0 & 1 & & \\ & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & 0 & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

(ד) עבור $k=7$ לא ניתן כי לא יהיו 2 בלוקים.