**חשבון אינפי 2 למדמ"ח**

**שיעור 8:** טורים של פונקציות, תחום התכנסות, התכנסות בהחלט ובמ"ש, גזירה איבר-איבר, אינטגרציה איבר-איבר.

**הגדרה:** טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום $A$ נקרא **מתכנס** (נקודתית) לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{S_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל- $S(x)$ לכל $x \in D$.

**הגדרה:** טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום $A$ נקרא **מתכנס במ"ש** לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם סדרת הסכומים החלקיים $\left\{S_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty} = \left\{\sum_{k=1}^{n} f_k(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש ל- $S(x)$ ב- $D$.

**מבחני התכנסות לטורים (להתכנסות במ"ש):**

1. **קריטריון** $\lim - \sup$ : טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום $A$ מתכנס במ"ש לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם ורק אם $\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} \left|S_n(x) - S(x)\right| = 0$.
2. **מבחן M ויירשטראס:** טור של פונקציות $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ המוגדרות בתחום $A$ מתכנס במ"ש לסכום $S(x)$ בתחום $D \subseteq A$ אם קיים טור חיובי מתכנס $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ של מספרים קבועים כך שלכל $x \in D$ מתקיים $\left|f_k(x)\right| \le a_k$.
3. **מבחן דיריכלה:** אם

   **א.** $\sum_{k=1}^{n} a_k(x)$ טור חסום בקטע $[a,b]$, כלומר קיים קבוע $M > 0$ כך ש- $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k(x)\right| \le M$ לכל $n \in \mathbb{N}$ ולכל $x \in [a,b]$.

   **ב.** $\left\{b_n(x)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה מונוטונית מתכנסת במ"ש ב- $[a,b]$ ל- 0,

   אזי $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) b_k(x)$ מתכנס במ"ש ב- $[a,b]$

4. **משפט דיני**: יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של פונקציות **רציפות ואי שליליות** בקטע $[a,b]$. אם הטור מתכנס לפונקציה **רציפה** $S(x)$, אזי ההתכנסות היא במ"ש.

**משפט:** יהי $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ טור של פונקציות רציפות המתכנס במ"ש בקטע $[a,b]$ ל- $S(x)$, אזי $S(x)$ רציפה.

**הערה:** משפט זה שימושי לשלילת התכנסות במ"ש.

**טור פונקציות חשוב:** $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ מתכנס לכל $-1<x<1$

**תרגילים:**

1. מצאו את תחומי ההתכנסות של הטורים הבאים:

**א.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\left(1+x^2\right)^n}$

**פתרון:** נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{n\left(1+x^2\right)^n}{(n+1)\left(1+x^2\right)^{n+1}} = \frac{1}{1+x^2}$$

$\frac{1}{1+x^2}<1$ לכל $x\neq 0$ ולכן לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס לכל $x\neq 0$.

אם $x=0$ מבחן דלאמבר נכשל. נציב $x=0$ בטור ונקבל טור הרמוני מתבדר $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$.

לסיכום הטור מתכנס לכל $x\neq 0$.

**ב.** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{nx}}{n^2-n+1}$

**פתרון:** נשתמש במבחן דלאמבר

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{e^{(n+1)x}}{(n+1)^2-(n+1)+1}}{\frac{e^{nx}}{n^2-n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n^2-n+1}{(n+1)^2-(n+1)+1}\right|\cdot\left|\frac{e^{(n+1)x}}{e^{nx}}\right| = e^x$$

$e^x<1$ לכל $x<0$ ולכן לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס לכל $x<0$

אם $x>0$ הטור מתבדר

אם $x=0$ מבחן דלאמבר נכשל ולכן נציב $x=0$ בטור ונקבל טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2-n+1}$

(ניתן להשוות עם טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ע"י מבחן ההשוואה הגבולי)

לסיכום הטור הנתון מתכנס לכל $x\le 0$.

**ג.** $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$

**פתרון:** נשתמש במבחן דלאמבר $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}(1-x)}{x^n(1-x)}\right|=|x|$

אם $|x|<1$ הטור מתכנס בהחלט

אם $|x|>1$ הטור מתבדר

אם $|x|=1$ מבחן דלאמבר נכשל- נבדוק התכנסות ע"י הצבה.

נציב $x=1$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}0=0$ טור מתכנס

נציב $x=-1$ נקבל $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot 2$ טור מתבדר (האיבר הכללי לא שואף לאפס)

לסיכום קיבלנו שהטור הנתון מתכנס בקטע $(-1,1]$.

**2.** האם הטור $\sum_{n=0}^{\infty}x^n(1-x)$ מתכנס במ"ש בקטעים הבאים:

**א.** $[a,b]\subseteq(-1,1)$

**ב.** $(-1,1)$

**ג.** $(0,3)$

**פתרון:** נמצא את סכום הטור:

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}x^k(1-x)=(1-x)+x(1-x)+...+x^{n-1}(1-x)=1-x^n$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-x^n\right)=S(x)=\begin{cases}1 & -1<x<1\\ 0 & x=1\end{cases}$$

נשתמש בקריטריון $\lim-\sup$ כדי לבדוק התכנסות במ"ש:

**א.** אם $[a,b]\subset(-1,1)$ נקבל:

$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|S_n(x)-S(x)|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|1-x^n-1|=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[a,b]}|x^n|=0$ ולכן ההתכנסות היא **במ"ש**.

הערה: ניתן להוכיח התכנסות במ"ש גם לפי הגדרה:

יהי $\varepsilon>0$ צריך למצוא $N\in\mathbb{N}$ כך שלכל $n>N$ ולכל $x\in[a,b]$ מתקיים $\left|S_n(x)-S(x)\right|<\varepsilon$, כלומר $\left|1-x^n-1\right|=\left|x^n\right|<\varepsilon$.

אם $x=0$ אי השוויון האחרון מתקיים לכל $n\in\mathbb{N}$ ולכן נניח ש- $x\neq0$

$n\ln|x|<\ln\varepsilon$ ולכן $n>\frac{\ln\varepsilon}{\ln|x|}>\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\max\left(|a|,|b|\right)\right)}$ .

**הסבר:** סימן אי השוויון התהפך, כי $\ln|x|<0$ עבור $x\neq0,|x|<1$ .

**לסיכום** ניתן לבחור $N=\left\|\left[\frac{\ln\varepsilon}{\ln\left(\max\left(|a|,|b|\right)\right)}\right]\right\|$ .

**ב.** אם $-1<x<1$ נקבל

$\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-1<x<1}\left|S_n(x)-S(x)\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-1<x<1}\left|1-x^n-1\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{-1<x<1}\left|x^n\right|=1\neq0$ ולכן ההתכנסות **לא במ"ש**

**הערה:** הוכחה דומה לסעיף א' לפי הגדרה מראה שלא ניתן לבחור $N$ שלא יהיה תלוי ב- $x$, כי ככל שה- $x$ יהיה יותר קרוב ל-1 נצטרך לבחור $N$ גדול יותר, כלומר ה- $N$ תלוי לא רק ב- $\varepsilon$ אלא גם ב- $x$ ולכן ההתכנסות אינה במ"ש.

**ג.** לא בכל הנקודות של הקטע $(0,3)$ הטור מתכנס ולכן **אינו מתכנס במ"ש** בקטע הנ"ל

**3.** האם הטורים הבאים מתכנסים במ"ש בתחום ההתכנסות שלהם:

**א.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$

**פתרון:** נמצא קודם את תחום ההתכנסות:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)^{3/2}}}{\frac{x^n}{n^{3/2}}}\right|=|x|$$

לפי מבחן דלאמבר הטור מתכנס בהחלט כאשר $|x|<1$.

נבדוק התכנסות בקצוות בקטע.

נציב $x=1$ ונקבל טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$

נציב $x=-1$ ושוב נקבל טור מתכנס $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^{3/2}}$ ולכן תחום ההתכנסות של הטור $[-1,1]$.

כדי להוכיח התכנסות במ"ש בתחום הנ"ל נשתמש במבחן $M$ ווירשטראס:

$\left|\frac{x^n}{n^{3/2}}\right| \le \frac{1}{n^{3/2}}$ לכל $x\in[-1,1]$ , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{3/2}}$ טור חיובי מתכנס ולכן הטור הנתון מתכנס במ"ש ב- $[-1,1]$.

**הערה:** למעשה $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^{3/2}}$ זהו טור חזקות וכל טור חזקות מתכנס במ"ש בכל קטע סגור המוכל בתחום התכנסותו. (עדיין לא דיברנו על טורי חזקות בתרגול ולכן הארכנו בהוכחה...)

**ב.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}$

**פתרון:**

נמצא את תחום ההתכנסות $\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^n}}{\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{n-1}}}=\frac{1}{1+x^2}$

$\frac{1}{1+x^2}<1$ לכל $x\neq 0$ ולכן הטור מתכנס בהחלט (למעשה זהו טור של פונקציות אי שליליות)

אם $x=0$ נציב בטור ונקבל טור של אפסים שגם הוא מתכנס ולכן תחום ההתכנסות של הטור הנתון הינו $\mathbb{R}$.

נמצא את סכום הטור:

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{x^2}{\left(1+x^2\right)^{k-1}}=x^2\cdot\frac{1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}}{1-\frac{1}{1+x^2}}=\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right)$$

**הסבר:** זהו סכום של $n$ איברים ראשונים של סדרה הנדסית בעלת איבר ראשון $a_1=x^2$ ומנה $q=\frac{1}{1+x^2}$.

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+x^2\right)\left(1-\frac{1}{\left(1+x^2\right)^n}\right)=\begin{cases}1+x^2 & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

$\lim_{x\to 0}S(x)=\lim_{x\to 0}\left(1+x^2\right)=1\neq 0=S(0)$ , כלומר פונקצית הסכום אינה רציפה ולכן לפי משפט ההתכנסות **אינה במ"ש.**

**שימו לב:** בכל קטע שאינו מכיל $x=0$ ההתכנסות היא במ"ש, כי זהו טור של פונקציות אי שליליות ורציפות המתכנס לפונקציה רציפה.

**ג.** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$

**פתרון:**

טור $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ הינו טור חסום לכל $x\in\mathbb{R}$ .

הסדרה $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרה מונוטונית יורדת לאפס ולכן לפי מבחן דיריכלה הטור מתכנס במ״ש בכל $\mathbb{R}$ .

כדי להוכיח ש- $\sum_{n=1}^{\infty}\sin nx$ חסום צריך להוכיח:

**א.** $\sin x+\sin 2x+...\sin nx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$ לכל $x\neq 2\pi k\ ,k\in\mathbb{Z}$

נוכיח באינדוקציה על $n$

**בסיס האינדוקציה:** $n=1$

$$\sin x=\frac{2\sin\frac{x}{2}\sin x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$ כדרוש

**הנחת האינדוקציה:** נניח $\sin x+\sin 2x+...\sin nx=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$

**נוכיח** $\sin x+\sin 2x+...\sin nx+\sin(n+1)x=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$

הוכחה: לפי הנחת האינדוקציה

$$\sin x+\sin 2x+...\sin nx+\sin\left(n+1\right)x=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\sin(n+1)x$$

$$\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}+\sin(n+1)x=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+2\sin\frac{1}{2}x\sin(n+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x+\cos\left(\frac{1}{2}x-(n+1)x\right)-\cos\left(\frac{1}{2}x+(n+1)x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

$$=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(\frac{1}{2}x+(n+1)x\right)}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+1+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}$$

מש״ל

ואז $\left|\sum_{k=1}^{n}\sin kx\right|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|=\left|\frac{2\sin\frac{nx}{2}\sin\frac{1+n}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|\le\frac{2}{\left|2\sin\frac{1}{2}x\right|}$ כלומר

לכל $n\in\mathbb{N}$ הסכום חסום.

**ב.** אם $x\neq 2\pi k$ ,$k\in\mathbb{Z}$ נקבל סכום של אפסים ואז ברור שהוא חסום.

**4.** הוכיחו כי $\sum_{n=1}^{\infty}x^n(1-x)^n$ מתכנס במ״ש ב-$[0,1]$.

**הוכחה:** נגדיר $f(x)=x(1-x)$ נמצא את נקודת המקסימום שלה בקטע $[0,1]$.

$f'(x)=1-2x=0$ , $x=\frac{1}{2}$ ולכן הערך המקסימלי של הפונקציה בקטע הנ״ל הינו

$f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ .

$\left|x^n(1-x)^n\right|\le\left(\frac{1}{4}\right)^n$ לכל $x\in[0,1]$ , $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^n$ זהו טור הנדסי מתכנס ולכן לפי מבחן M-ויירשטראס הטור הנתון מתכנס במ״ש בקטע הנ״ל.

**5.** האם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n x^2}{n}$ מתכנס במ״ש ב-$[-1,3]$?

**פתרון:** מבחן M-ווירשטארס נכשל במקרה זה, כי $\left|\frac{(-1)^n x^2}{n}\right|\le\frac{9}{n}$ ו-$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{9}{n}$ טור מתבדר.

לפי מבחן לייבניץ לטור עם סימנים מתחלפים מתקיים

$$\left|r_n\left(x\right)\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(-1\right)^k a_k\right|=\left|\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^n x^2}{k}\right|\le a_{n+1}=\frac{x^2}{n+1}$$

ולפי מבחן $\lim-\sup$ נקבל $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[-1,3]}\left|r_n\left(x\right)\right|\le\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{x\in[-1,3]}\left|\frac{x^2}{n+1}\right|=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{9}{n+1}=0$ ולכן הטור מתכנס במ״ש בקטע הנ״ל.

**משפט:** תהי $\left\{f_n\left(x\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות גזירות ברציפות. אם

1. הטור $\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(x\right)$ מתכנס נקודתית בקטע $[a,b]$.
2. טור הנגזרות $\sum_{k=1}^{\infty}f_k'\left(x\right)$ מתכנס במ״ש בקטע $[a,b]$,

אז $\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(x\right)$ מתכנס במ״ש ב-$[a,b]$ וגם גזיר ומתקיים

$\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k\left(x\right)\right)'=\sum_{k=1}^{\infty}f_k'\left(x\right)$ (כלומר נגזרת הסכום שווה לסכום הנגזרות)

**6.** תהי $f\left(x\right)$ מוגדרת ע״י $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ , $x\in\mathbb{R}$. הוכיחו כי

**א.** $f\left(x\right)$ מוגדרת היטב (כלומר הטור מתכנס)

**ב.** $f\left(x\right)$ גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$

**ג.** $f'(x)$ רציפה לכל $x\in\mathbb{R}$.

**פתרון:**

**א.** $\left|\frac{\cos nx}{n^3}\right|\le\frac{1}{n^3}$ לכל $x\in\mathbb{R}$ , $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^3}$ מתכנס ולכן לפי מבחן M ויירשטראס הטור הנתון מתכנס במ״ש בכל $\mathbb{R}$ ולכן הפונקציה $f\left(x\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos nx}{n^3}$ , $x\in\mathbb{R}$ מוגדרת היטב. כדרוש.

**ב.** נסתכל על טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n\sin nx}{n^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}$. גם טור הנגזרות מתכנס במ״ש לפי מבחן M-ויירשטראס ולכן לפי משפט לעיל $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\cos nx}{n^3}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-\sin nx}{n^2}$ , כלומר $f\left(x\right)$ גזירה לכל $x\in\mathbb{R}$ , כדרוש.

**ג.** הפונקציות $f_n(x)=\frac{-\sin nx}{n^2}$ רציפות בכל $\mathbb{R}$ והטור מתכנס במ״ש ולכן לפי משפט סכום הטור $f'(x)$ פונקציה רציפה בכל $\mathbb{R}$.

**7.** מהו סכום הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}$ עבור $x\geq a>1$ ( $a$ קבוע) ?

**פתרון:**

**א.** נתבונן בטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}=\frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x-1}$ לכל $x\geq a>1$, כלומר הטור מתכנס נקודתית לכל $x\geq a>1$.

**ב.** נסתכל על טור הנגזרות $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{n}{x^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)'$ ונראה שהוא מתכנס במ״ש ב-$[a,\infty)$, $a>1$.

$\left|\frac{n}{x^{n+1}}\right|\leq\frac{n}{a^{n+1}}$ לכל $x\in[a,\infty)$, הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a^{n+1}}$ מתכנס (אפשר להראות לפי מבחן דלאמבר) ולכן לפי מבחן M-ווירשטראס הטור של הנגזרות מתכנס במ״ש בתחום הנ״ל.

מסעיפים א׳ ו-ב׳ לפי משפט לעיל נובע שניתן לעשות גזירה איבר איבר של הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}=\frac{1}{x-1}$

ולקבל $\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{n}{x^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right)'=-\frac{1}{(x-1)^2}=\left(\frac{1}{x-1}\right)'=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{x^n}\right)'$ ולכן $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{x^n}=\frac{x}{(x-1)^2}$

**משפט:** תהי $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה של פונקציות רציפות. אם $\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)$ מתכנס במ״ש ב-$[a,b]$ ל-$S(x)$, אזי

**א.** $S(x)$ אינטגראבילית ב-$[a,b]$.

**ב.** $\int_a^b\left(\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)\right)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\left(\int_a^b f_k(x)dx\right)$

**8.** חשבו את $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k}$

**פתרון:** נתבונן בטור $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$ ונמצא את סכומו $S(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k}$.

טור $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \frac{1}{1-x}$ מתכנס במ״ש ב-$[-r,r]\subset(-1,1)$ ולכן לפי משפט ניתן לעשות אינטגרציה איבר איבר ולקבל

$$\int_0^x \frac{1}{1-t}dt = -\ln|1-x| = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^x t^{k-1}dt = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^k}{k} = S(x)$$

ולכן $S\left(\frac{1}{3}\right) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k\cdot 3^k} = -\ln\left|1-\frac{1}{3}\right| = -\ln\frac{2}{3}$