פתרון בוחן בלינארית 1
88-112 סמסטר א' תשע"ט

הוראות בהגשת הפתרון יש לרשום שם מלא ומספר ת"ז.
יש לענות על כל השאלות פתרון מלא ומנומק.
משך הבוחן: 90 דקות.
חומר עזר: מחשבון פשוט.

שאלה 1.

1. תהיינה A וC מטריצות (לאו דווקא ריבועיות) כך שמתקיים $CA = I$.
   הוכיחו כי הפתרון הטריוואלי הוא הפתרון היחיד למערכת ההומוגנית $Ax = 0$.
2. תהיינה $A, B \in M_{n\times n}$. נתון כי A מטריצה הפיכה.
   הוכיחו כי למערכות $ABx = 0$ ו- $Bx = 0$ יש את אותם פתרונות.

פתרון.

1. יהיה v פתרון למערכת ההומוגנית $Ax = 0$, ונוכיח כי $v = 0$.
   כיוון שv פתרון מתקיים:
   $$\begin{gathered} Av = 0 \ / \cdot C \\ \Downarrow \\ CAv = C0 = 0 \\ \Downarrow \\ v = 0 \end{gathered}$$
   כאשר המעבר האחרון הוא מהנתון $CA = I$.
2. צריך להוכיח כי קבוצת הפתרונות של המערכת $ABx = 0$ שווה לקבוצת הפתרונות של המערכת $Bx = 0$.
   נוכיח הכלה בכיוון אחד:
   נניח כי v הוא פתרון של המערכת $Bx = 0$, לכן מתקיים כי $Bv = 0$ נכפול מצד שמאל את שני האגפים בA לקבלת $ABv = 0$, ולכן v הוא גם פתרון למערכת $ABx = 0$.
   בכיוון השני:

יהי v פתרון של המערכת $ABx=0$, לכן מתקיים כי $ABv=0$. לפי הנתון A מטריצה הפיכה, ולכן קיימת לה מטריצה הופכית A^{-1}. נכפול מצד שמאל את שני האגפים ב A^{-1} ונקבל

$$A^{-1}ABv=A^{-1}0$$
$$\Downarrow$$
$$Bv=0$$

כלומר v הוא פתרון למערכת $Bx=0$.

שאלה 2. קבעו האם הקבוצות הבאות הן תתי מרחבים של $\mathbb{R}_3\left[x\right]$, הוכיחו את קביעתכם.

1. $U=\left\{p\left(x\right)\mid p\left(1\right)=0\right\}$
2. $W=\left\{p\left(x\right)\mid p\left(1\right)=1\right\}$

1. נוכיח כי U תת מרחב של $\mathbb{R}_3\left[x\right]$ עפ"י הקריטריון המקוצר לתת מרחב.

(א) ברור כי פולינום האפס שייך לU, כיוון שכאשר נציב בפולינום האפס כל ערך של x, ובפרט כאשר נציב 1 התוצאה תהיה 0.

(ב) יהיו $p_1\left(x\right),p_2\left(x\right)\in U$ פולינומים. נבדוק האם $\alpha p_1\left(x\right)+p_2\left(x\right)\in U$:

$$\alpha p_1\left(1\right)+p_2\left(1\right)=\alpha 0+0=0$$

ולכן אכן מתקיים כי $\alpha p_1\left(x\right)+p_2\left(x\right)\in U$, ו$U$ הוא תת מרחב של $\mathbb{R}_3\left[x\right]$.

2. W הוא אינו תת מרחב כיוון שהוא לא מכיל איבר ניטרלי לחיבור, כיוון שפולינום האפס **לא** מקיים $p\left(1\right)=1$.

שאלה 3. בדקו האם הקבוצה הבאה תלויה לינארית. במידה וכן, הציגו את אחד הוקטורים כצירוף לינארי של האחרים

$$S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\right\}$$

פתרון.

ניקח צירוף לינראי מתאפס, ונבדוק האם קיים פתרון לא טריוואלי:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\2&3&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-2R_1\to R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-1&1&0\\0&-1&1&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_2\to R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&0&0\\0&-1&1&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

נסמן את המשתנה החופשי $\gamma=t$, כלומר אוסף הפתרונות למערכת הוא $\left\{\begin{pmatrix}-2t\\t\\t\end{pmatrix}\middle|\, t\in\mathbb{R}\right\}$,
בפרט קיים צירוף לינארי לא טריוואלי, ולכן הקבוצה תלויה לינארית.
צירוף לינארי מתאפס לא טריוואלי לדוגמה הוא:

$$-2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

והצגנו את אחד הוקטורים מהקבוצה כצירוף לינארי של שני הוקטורים האחרים.