פתרון תרגיל בית 1

שאלה 1

חשב את האינטגרליים הבאים השתמש באינטגרליים המיידים:

א. $\int \frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}dx$.

ב. $\int \frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}}dx$.

ג. $\int \frac{x^2+4x+5}{x+4}dx$.

ד. $\int \sin x\cos 5x dx$

ה. $\int \left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2 dx$

פתרון שאלה 1

סעיף א

$$\int \frac{9^x-4^x}{3^x-2^x}dx=\int \frac{\left(3^x-2^x\right)\cdot\left(3^x+2^x\right)}{3^x-2^x}dx=\int\left(3^x+2^x\right)dx=\frac{3^x}{\ln 3}+\frac{2^x}{\ln 2}+c.$$

סעיף ב

$$\int \frac{11}{\sqrt[3]{4-5x}}dx=\int 11\cdot(4-5x)^{-\frac{1}{3}}dx=\frac{11}{-5}\cdot\frac{3}{2}(4-5x)^{\frac{2}{3}}+c=-\frac{33}{10}\sqrt[3]{(4-5x)^2}+c.$$

סעיף ג

$$\int \frac{x^2+4x+5}{x+4}dx=\int\left(\frac{x(x+4)}{x+4}+\frac{5}{x+4}\right)dx=\int\left(x+\frac{5}{x+4}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5\ln|x+4|+c.$$

סעיף ד

נשתמש בזהויות $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$

$$\int \sin x\cos 5x dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin 6x+\sin(-4x)\right)dx=\int\frac{1}{2}\left(\sin 6x-\sin(4x)\right)dx=-\frac{1}{12}\cos 6x+\frac{1}{4}\cos 4x+c$$

סעיף ה

$$\int\left(1+\sqrt[3]{x^2}\right)^2dx=\int\left(1+2x^{\frac{2}{3}}+x^{\frac{4}{3}}\right)dx=x+\frac{6x^{\frac{5}{3}}}{5}+\frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7}+c$$

שאלה 2

חשב את האינטגרליים הבאים בעזרת שיטת ההצבה:

א. $\int \frac{\sin(\ln x)}{x}dx$.

ב. $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx$.

ג. $\int \frac{x}{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}dx$.

פתרון שאלה 2

סעיף א

נציב $t=\ln x \Leftarrow dt=\frac{dx}{x}$. $\int \sin t dt = -\cos t = -\cos(\ln x)+c$.

סעיף ב

נציב $t=x^4+1 \Leftarrow dt=4x^3dx$. $\int x^3\sqrt{x^4+1}dx=\frac{1}{4}\int\sqrt{t}dt=\frac{2t\sqrt{t}}{6}=\frac{2\left(x^4+1\right)\sqrt{x^4+1}}{6}+c$.

סעיף ג

נציב $x=t^6 \Rightarrow dx=6t^5dt$

$\int\frac{6t^9}{1+t}dt=\int\frac{t^6\cdot 6t^5}{t^3+t^2}dt$ ומכאן מבצעים חלוקת פולינומים ופותרים.

שאלה 3

חשב את האינטגרלים הבאים בעזת שיטת אינטגרציה בחלקים:

א. $\int x^3\ln x dx$.

ב. $\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}dx$.

ג. $\int \arctan x dx$.

ד. $\int e^x\sin(2x)dx$.

ה. $\int x\cos x dx$.

ו. $\int\sqrt[3]{x}\ln x dx$.

פתרון שאלה 3

סעיף א

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=\ln x \quad v=\frac{x^4}{4}$$
$$u'=\frac{1}{x} \quad v'=x^3$$

$$\int x^3\ln x dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^4}{4}\cdot\frac{1}{x}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\int\frac{x^3}{4}dx=\frac{x^4\ln x}{4}-\frac{x^4}{16}+c.$$

סעיף ב

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים

$$v=2(x-1)^{0.5} \quad u=2x$$
$$v'=(x-1)^{-0.5} \quad u'=2$$

$$\int\frac{2x}{\sqrt{x-1}}dx=4x\sqrt{x-1}-\int 4(x-1)^{\frac{1}{2}}dx=4x\sqrt{x-1}-\frac{8(x-1)\sqrt{x-1}}{3}+c.$$

סעיף ג

נסמן $u=\arctan x$, $v'=1$ ואז $u'=\frac{1}{1+x^2}$, $v=x$.

נשתמש בנוסחה $\int uv'dx=uv-\int u'vdx$ ונקבל

$$\int\arctan x dx=x\arctan x-\int\frac{x}{1+x^2}dx.$$

נשאר לנו לפתור את האינטגרל הבא $\int\frac{x}{1+x^2}dx$.

נבחר בהצבה $t=x^2$ ואז $dt=2xdx$.

$$\frac{1}{2}\int\frac{2x}{1+x^2}dx=\frac{1}{2}\int\frac{dt}{1+t}=\frac{1}{2}\ln|1+t|=\frac{1}{2}\ln(1+x^2).$$

$$\int\arctan xdx=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)+c.$$

<u>סעיף ד</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=\sin(2x)\qquad v=e^x$$

$$u'=2\cos(2x)\quad v'=e^x$$

$$\int e^x\sin(2x)dx=e^x\sin(2x)-2\int e^x\cos(2x)dx.$$

נשאר לחשב את האינטגרל $\int e^x\cos(2x)dx$.

ניעזר שוב באינטגרציה בחלקים:

$$u=\cos(2x)\qquad v=e^x$$

$$u'=-2\sin(2x)\quad v'=e^x$$

$\int e^x\cos(2x)dx=e^x\cos(2x)+2\int e^x\sin(2x)dx$ נציב במשוואה שקיבלנו קודם

$$\int e^x\sin(2x)dx=e^x\sin(2x)-2\cdot\left(e^x\cos(2x)+2\int e^x\sin(2x)dx\right)$$

$$\int e^x\sin(2x)dx=e^x\sin(2x)-2e^x\cos(2x)-4\int e^x\sin(2x)dx$$

$$5\int e^x\sin(2x)dx=e^x\sin(2x)-2e^x\cos(2x)$$

$$\int e^x\sin(2x)dx=\frac{1}{5}e^x\sin(2x)-\frac{2}{5}e^x\cos(2x)+c$$

<u>סעיף ה</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=x\quad v=\sin x$$

$$u'=1\quad v'=\cos x$$

$$\int x\cos xdx=x\sin x-\int\sin xdx=x\sin x+\cos x+c$$

<u>סעיף ו</u>

נפתור בעזרת אינטגרציה בחלקים:

$$u=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\quad v=\ln x$$

$$u'=x^{\frac{1}{3}}\quad v'=\frac{1}{x}$$

$$\int\sqrt[3]{x}\ln xdx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x-\frac{3}{4}\int x^{\frac{1}{3}}dx=\frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}}\ln x-\frac{9}{16}x^{\frac{4}{3}}+c.$$