

פתרון תרגיל 10 מבוא לתורת החבורות תשע"ט

שאלה 1. האם קיימת חבורה פשוטה מסדר 15? מסדר 16? 17? 18? 19? 20? 21? 22? 23? לכל סדר, ענו האם כל חבורה מאותו הסדר היא פשוטה?

פתרון. נשתמש בכל הטענות והמשפטים שראינו.

1. $15 = 5 \cdot 3$, 3 שניהם ראשוניים, $5 > 3$, $5 \not\equiv 1 \pmod{3}$ ולכן כל חבורה מסדר 15 היא ציקלית. לכן, אפשר לרשום כל חבורה מסדר 15 כך:

$$\{e, g, g^2, \dots, g^{15}\}$$

מכיוון שהחבורה ציקלית היא אבלית ולכן כל תת-חבורה היא נורמלית, למשל $\{e, g^5, g^{10}\}$. לכן לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 15.

2. $16 = 2^4$, ולכן חבורה מסדר 16 היא חבורת p . אם היא אבלית, לפי משפט קושי יש איבר מסדר 2 בחבורה, והוא יוצר תת-חבורה מסדר 2; מכיוון שהחבורה אבלית תת-החבורה היא נורמלית ולכן החבורה לא פשוטה. אם החבורה לא אבלית, לפי משפט המרכז שלה לא טריוויאל; המרכז הוא תת-חבורה נורמלית ולכן החבורה לא פשוטה. סה"כ לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 16.

3. 17 ראשוני ולכן כל חבורה מסדר 17 היא פשוטה.

4. $18 = 3^2 \cdot 2$, ולפי מה שראינו בתרגול חבורה מסדר p^2q היא לא פשוטה. לכן לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 18.

5. 19 ראשוני ולכן כל חבורה מסדר 19 היא פשוטה.

6. $20 = 2^2 \cdot 5$. 20 ולכן לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 20 (מאותם השיקולים כמו של 18).

7. $21 = 3 \cdot 7$. לפי משפט סילו 3 מתקיים:

$$n_7 \equiv 1 \pmod{7}, n_7 | 3$$

ולכן $n_7 = 1$, כלומר יש תת-חבורה 7-סילו אחת. לפי משפט סילו 2, תת-חבורה זו היא נורמלית. לכן לחבורה מסדר 21 תמיד יש תת-חבורה נורמלית לא טריוויאלית, ולכן לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 21.

8. $22 = 2 \cdot 11$. 11 ראשוני ולכן לפי משפט קושי קיים איבר מסדר 11. איבר זה יוצר תת-חבורה מסדר 11. תת-חבורה זו היא מאינדקס 2 ולכן נורמלית. לכן לא קיימת חבורה פשוטה מסדר 22.

9. 23 ראשוני ולכן כל חבורה מסדר 23 היא פשוטה.