03.10.17

פתרון 88-112 אלגברה לינארית 1 – קורס קיץ תשע"ח – מועד ב'

מרצים: דר' שמעון ברוקס, דר' אלי מצרי, דר' ארז שיינר

מתרגלים: ניקול בלשוב, עדי בן-צבי, תמר בר-און, עוזי חרוש, מיכאל טויטו, עקיבא מלכה, פולינה לוצקר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

- יש לענות על **כל** 5 השאלות. סה"כ הניקוד המקסימלי 105 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).
- יש לענות על **דפי הבחינה** בלבד. ניתן להשתמש במחברת כטיוטה, אך המחברת **לא תיבדק כלל**.

<u>חלק א'</u>

1. (12 נק') יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל אותו שדה, ותהי $T:V\to W$ העתקה לינארית.

הוכיחו כי $\dim\ker T+\dim\operatorname{Im}T=\dim V$.

משפט הדרגה מההרצאה.

2. (24 נק') יהיו V,W מרחבים וקטוריים נוצרים סופית מעל אותו שדה, ותהיינה $T:V\to W, S:W\to V$ העתקות לינאריות. **הוכיחו או הפריכו** את הטענות הבאות:

א. אם $\ker T\subseteq \operatorname{Im}S$ אזי $\dim\ker T\le\dim\ker\left(T\circ S\right)$.

<u>הוכחה:</u>

ניקח בסיס $\left\{v_1,\dots,v_k\right\}$ ל $\ker T$. כיוון ש $\ker T\subseteq\operatorname{Im}S$ קיימים $w_1,\dots,w_k\in W$ כך ש $Sw_i=v_i$ לכל $1\le i\le k$.

כיוון שהקבוצה הסדורה $\left\{v_1,\dots,v_k\right\}$ בת"ל, בוודאי שגם $\left\{w_1,\dots,w_k\right\}$ בת"ל.

(הרי אם $a_1w_1+\dots+a_kw_k=0_W$ אזי $a_1Sw_1+\dots+a_kSw_k=S\left(0_W\right)$

ולכן $a_1v_1+\dots+a_kv_k=0_V$.)

כעת, לכל $1\le i\le k$ מתקיים כי $T\circ S\left(w_i\right)=T\left(Sw_i\right)=Tv_i=0_W$,

לכן $\left\{w_1,\dots,w_k\right\}\subseteq\ker\left(T\circ S\right)$ ולכן $\dim\ker T=k\le\dim\ker\left(T\circ S\right)$.

ב. אם $V=W$ ו $S\circ T=T\circ S$, אזי $\dim\ker T=\dim\ker S$.

<u>הפרכה:</u>

ניקח $T=I$ העתקת הזהות. ברור ש $S\circ I=I\circ S=S$.

נבחר S להיות העתקת האפס, לכן $\ker T=\left\{0_V\right\},\ker S=W=V$.

עבור המרחב הוקטורי $V=\mathbb{R}^2$ ברור כי $\dim\ker T=0\ne 2=\dim\ker S$

ג. אם $\ker T \cap \operatorname{Im} S = \{0_V\}$ וגם S חח"ע, אזי $T \circ S$ הפיכה.

<u>הוכחה:</u>

נוכיח כי $\ker(T \circ S) = \{0_W\}$ ולכן $T \circ S$ חח"ע.

כיוון ש $T \circ S : W \to W$ העתקה ממרחב לעצמו וגם חח"ע, אזי היא הפיכה.

יהי $w \in \ker(T \circ S)$ לכן $T(Sw) = 0_W$ לכן $Sw \in \ker T$.

מצד שני ברור כי $Sw \in \operatorname{Im} S$ ולכן לפי הנתון $Sw = 0_V$, כלומר $w \in \ker S$.

כיוון ש S חח"ע נובע כי $w = 0_W$ כפי שרצינו.

ד. אם $V = W$ ו T הפיכה אזי $T \circ S = S \circ T$.

<u>הפרכה:</u>

נבחר $V = \mathbb{R}^2$, ואת ההעתקה הלינארית $T(x, y) = (y, x)$.

כמובן ש T הפיכה (היא ההופכית של עצמה).

נבחר $S(x, y) = (x, 0)$.

כעת $T(S(x, y)) = T(x, 0) = (0, x)$

אך $S(T(x, y)) = S(y, x) = (y, 0)$

ולכן קל לראות כי $T \circ S \neq S \circ T$.

3. (10 נק') יהי V מרחב וקטורי נוצר סופית ממימד n, יהי B בסיס סדור ל V ותהי A מטריצה ריבועית הפיכה מגודל $n\times n$ מעל אותו שדה.

הוכיחו/הפריכו: קיים בסיס סדור C ל V כך ש $A=[I]_C^B$.

(כאשר $[I]_C^B$ היא מטריצת המעבר מ B ל C)

<u>הוכחה:</u>

אנו רוצים כי $A^{-1}=[I]_B^C$ לכן נגדיר v_i כך ש $[v_i]_B=C_i\left(A^{-1}\right)$, כלומר v_i הוא צירוף לינארי של איברי הבסיס B עם המקדמים מהעמודה ה i של A^{-1}.

כיוון ש A^{-1} הפיכה, עמודותיה בת"ל.

לכן $[v_1]_B,...,[v_n]_B$ בת"ל ולכן גם $v_1,...,v_n$ בת"ל.

לפי השלישי חינם $C=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס סדור ל V.

סה"כ $A^{-1}=[I]_B^C$ ולכן $A=[I]_C^B$.

חלק ב'

4. נביט במישור $U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\middle|\, t,s\in\mathbb{R}\right\}$.

ובישר $W=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3\,\middle|\,\begin{cases}x+y-z=1\\x-y+2z=0\end{cases}\right\}$.

א. (5 נק') הוכיחו כי U תת מרחב של $\mathbb{R}^3$.

נוכיח כי $U=span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$ וידוע שהמרחב הנפרש הוא תת מרחב.

נשים לב כי $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}$, לכן

$$U=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\middle|\, t,s\in\mathbb{R}\right\}=\left\{(3+t)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(s-1)\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\middle|\, t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

ולכן $U\subseteq span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$

מצד שני

$$span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\middle|\, t,s\in\mathbb{R}\right\}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+(t-3)\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+(s+1)\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\middle|\, t,s\in\mathbb{R}\right\}$$

לכן $U\supseteq span\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\3\\-1\end{pmatrix}\right\}$ וסה"כ הראנו הכלה דו כיוונית.

ב.   (10 נק') מצאו את $U\cap W$ (החיתוך בין המישור לישר).

נציג את U כפתרון מערכת משוואות (בעצם נמצא את המישור בצורה אלגברית).

$\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in U$ אם ורק אם קיים פתרון למערכת $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x\\ 1 & 3 & y\\ 0 & -1 & z\end{array}\right)$.

נדרג

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x\\ 1 & 3 & y\\ 0 & -1 & z\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x\\ 0 & 1 & y-x\\ 0 & -1 & z\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_2}\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & x\\ 0 & 1 & y-x\\ 0 & 0 & z+y-x\end{array}\right)$$

לכן $\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in U$ אם"ם $-x+y+z=0$

לכן סה"כ $U\cap W=\left\{\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \;\middle|\; \left\{\begin{array}{l} x+y-z=1\\ x-y+2z=0\\ -x+y+z=0\end{array}\right.\right\}$.

נפתור את המערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[R_2-R_1]{R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & -2 & 3 & -1\\ 0 & 0 & 3 & 0\end{array}\right)\xrightarrow[-R_2]{\frac{1}{3}R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1\\ 0 & 2 & -3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\rightarrow$$

$$\xrightarrow[R_1+R_3]{R_2+3R_3}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right)$$

לכן נקודת החיתוך בין הישר למישור היא $U\cap W=\left\{\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\\ 0\end{pmatrix}\right\}$

ג. (7 נק') מצאו בסיס לתת מרחב $V \subseteq \mathbb{R}^3$ ממימד 2 כך ש $V \cap W = \varnothing$.

נגדיר $V = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \middle| x + y - z = 0 \right\}$.

ברור ש $V \cap W = \varnothing$ כיוון שמשוואה זו סותרת את המשוואה הראשונה ב W.

נמצא בסיס ל V.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ מדורגת קנונית. נסמן $y = t, z = s$ ולכן הפתרון הכללי הינו

$(-t + s, t, s) = t(-1,1,0) + s(1,0,1)$.

לכן $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ בסיס ל V והוא אכן ממימד 2.

ד. (7 נק') מצאו בסיס לתת מרחב $V\subseteq\mathbb{R}^3$ ממימד 2 כך ש $W\subseteq V$.

ראשית נמצא את הפתרון הכללי של W.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\1&-1&2&0\end{array}\right)\xrightarrow{R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&-2&3&-1\end{array}\right)\xrightarrow{-\frac{1}{2}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&-1&1\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)\to$$

$$\xrightarrow{R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&1&-\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right)$$

ולכן הפתרון הכללי הינו $\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}t,\frac{1}{2}+\frac{3}{2}t,t\right)=\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},0\right)+t\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{2},1\right)$

לכן ברור כי $W\subseteq span\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$, וכיוון שזוג הוקטורים הללו אינם פרופורציונאליים

הם מהווים בסיס ל $V=span\left\{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}\right\}$, ולכן הוא ממימד 2 כפי שרצינו.

5. נתונה המטריצה $A=\begin{pmatrix} x & -1 & 0 \\ 0 & x & -1 \\ c & b & a \end{pmatrix}$.

א. (10 נק') קבעו עבור אילו ערכי $a,b,c,x\in\mathbb{R}$ המטריצה הפיכה.

נחשב את הדטרמיננטה לפי שורה ראשונה

$$|A| = x\begin{vmatrix} x & -1 \\ b & a \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ c & a \end{vmatrix} = x(ax+b)+c = ax^2+bx+c$$

המטריצה הפיכה אם"ם $|A|\neq 0$ כלומר:

אם $b^2-4ac<0$ היא הפיכה לכל x (זכרו שמדובר במספרים ממשיים).

אם $b^2-4ac\geq 0$ אזי המטריצה הפיכה לכל $x\neq\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

ב. (10 נק') נניח כי $a=1,b=-3,c=2$. לאילו ערכי x מתקיים

כי $\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}\in C(A)$? (כאשר $C(A)$ הוא מרחב העמודות של A.)

לפי סעיף א', המטריצה הפיכה אם"ם $x^2-3x+2\neq 0$ כלומר עבור $x\neq 1,2$ המטריצה הפיכה, לכן עמודותיה בת"ל ופורשות את כל $\mathbb{R}^3$ ולכן $\begin{pmatrix}1\\1\\x\end{pmatrix}\in C(A)$.

את שני המקרים הנותרים נבדוק אחד אחד:

עבור $x=1$ הוקטור שייך למרחב העמודות אם"ם יש פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&-1&1\\2&-3&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&-1&1\\0&-1&1&-1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-1&0&1\\0&1&-1&1\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

למערכת יש פתרון ולכן גם במקרה זה הוקטור שייך למרחב העמודות.

עבור $x=2$ הוקטור שייך למרחב העמודות אם"ם יש פתרון למערכת

$$\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&1\\0&2&-1&1\\2&-3&1&2\end{array}\right)\xrightarrow{R_3-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&1\\0&2&-1&1\\0&-2&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3+R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}2&-1&0&1\\0&2&-1&1\\0&0&0&2\end{array}\right)$$

במערכת זו יש שורת סתירה ולכן אין פתרון, ולכן הוקטור אינו שייך למרחב העמודות במקרה זה.

סה"כ התשובה: לכל $x\neq 2$.

ג. (10 נק') נניח כי $a=1, b=0, c=1$ מצאו $x\in\mathbb{C}$ כך ש $|A|=0$,

ומצאו בסיס ל $N(A)$ במקרה זה. (כאשר $N(A)$ הוא מרחב האפס של

המטריצה A.)

צ"ל $x\in\mathbb{C}$ כך ש $x^2+1=0$ כמובן ש $x=i$ מקיים משוואה זו.

נמצא בסיס למרחב האפס:

$$\begin{pmatrix} i & -1 & 0 \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1-iR_3} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -i \\ 0 & i & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2+iR_1} \begin{pmatrix} 0 & -1 & -i \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\substack{R_1\leftrightarrow R_2 \\ -R_2}]{R_2\leftrightarrow R_3} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

נסמן $z=t$ ולכן הפתרון הכללי למערכת ההומוגנית הוא $(-t,-it,t)$ ולכן סה"כ

$N(A)=span\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ -i \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$ וקבוצה זו מהווה את הבסיס.