

תרגול

- 7 -

אפשרית

משפט השלישי חינוך,
מציאת בסיס לחיתוך
ולסכום מרחבים, משפט
המימדים ווקטורי
קורדינטות ככלי למציאת
בסיסים



המשפט היסודי: $\forall V$ יש $S \subseteq V$ כך ש-
 (1) $\text{span}(S) = V$
 (2) $\#S = \dim V$
 (3) $\#S = \dim V$ (האי-הוודאות קטן)

משפט בונזונג: יהי V מרחב וקטורי מממד n מעל F . יהי $W \subseteq V$ מרחב תת-מרחב מממד k .
 $\beta = \{w_1, \dots, w_k\}$ בסיס של W .

(1) $\text{span}(\beta) = W$
 (2) β היא קבוצת וקטורים ב- W המייצגת את W באופן יחיד.

$\text{span}(\beta) = W \iff \# \beta = \dim W = k$
 $\iff \beta$ היא קבוצת וקטורים ב- W המייצגת את W באופן יחיד.

המשפט היסודי: $\forall V$ יש $S \subseteq V$ כך ש-
 (1) $\text{span}(S) = V$
 (2) $\#S = \dim V$
 (3) $\#S = \dim V$ (האי-הוודאות קטן)

זה נותן לנו שיטת הוכחה מאוד חזקה לשיוויון מרחבים. הכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים

תוצאה:

$$W_2 = \{ p(x) \in V \mid p(2) = 0 \}$$

$$W_1 = \{ p(x) \in V \mid p(1) = 0 \}$$

$$W = \{ p(x) \in V \mid p(1) = p(2) = 0 \}$$

הוא $V = \mathbb{R}_2[x]$ - המרחב הריבועי הנמוך ביותר
הריבוע הנמוך ביותר - פשוט

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$$

$$p(1) = a_0 + a_1 + a_2$$

$$p(2) = a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 2^2$$

$$a_0 + a_1 + a_2 = 0$$

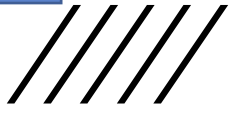
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 = 0$$

יש לנו 3 משוואות עם 3 נעלמות (מערבב) - 3 משוואות עם 3 נעלמות

$$p(x) = (x-1)(x-2)$$

כל משפט הפולינום מינימלי של $p(x) \in W$ הוא יחידה גמילה, כלומר $p(x) = (x-1)(x-2)$

מי שלא רואה שידרג ויגלה זאת...



תכנית (הזרע) (הזרע)

יכול V להיות B , קבוצת מובילי V -
בזמן התהוות המאפיין:

$V = \text{span}(A) \oplus \text{span}(B/A)$ עיקרון $A \subseteq B$ וכל B -
בזמן V קבוצת מובילי B וכל B -
בזמן המאפיין B וכל B -

תכנית:
בזמן V קבוצת מובילי B וכל B -
בזמן המאפיין B וכל B -

$A = \{v_1, \dots, v_j\}$ $B = \{v_1, \dots, v_n\}$
עיקרון $A \subseteq B$ וכל B -
בזמן V קבוצת מובילי B וכל B -

$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_j\} \oplus \text{span}\{v_{j+1}, \dots, v_n\}$
עיקרון $A \subseteq B$ וכל B -
בזמן V קבוצת מובילי B וכל B -

$\text{span}\{v_1, \dots, v_j\} \cap \text{span}\{v_{j+1}, \dots, v_n\} = \{0\}$

$V = \text{span}\{v_1, \dots, v_j\} + \text{span}\{v_{j+1}, \dots, v_n\}$

בזמן $A = \emptyset$ וכל B -
בזמן המאפיין B וכל B -
בזמן $V = 0$ וכל B -

$a_1 v_1 + \dots + a_j v_j = b_{j+1} v_{j+1} + \dots + b_n v_n$

בזמן המאפיין B וכל B -
בזמן $V = 0$ וכל B -

$a_1 v_1 + \dots + a_j v_j - b_{j+1} v_{j+1} - \dots - b_n v_n = 0$

בזמן $V = 0$ וכל B -
בזמן המאפיין B וכל B -



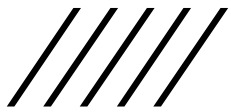
$$\text{span}\{v_1, \dots, v_j\} + \text{span}\{v_{j+1}, \dots, v_n\} = \\ = \text{span}\{v_1, \dots, v_j, v_{j+1}, \dots, v_n\} = \text{span}(B) = V$$

התוצאה היא: $\text{span}(B) = V$

1 ← 2: הטון שבה נכון לכל קבוצת המופים B של V - לפיכך - גם נכון לפי ריקה. גם - ז'בא ש-
 $V = \text{span}(\phi) \oplus \text{span}(B/\phi) = \text{span}(B)$

כלומר B פורש את V . נגזר להכא ש- B הוא צירוף ליניארי של המופים. נסמן A את הנקודות
 נקודות B אינה חתול, נקודות A וקטור אחר ממנה u הוא צירוף ליניארי של המופים. נסמן $A = \{u\}$ ומכיוון שההכא -
 שמתאם u כלומר $A = \{u\}$ ומכיוון שההכא - $u \neq 0$ ונקודותיהם לא יכולות להכא הריש (אנך שטוח
 רק את וקטור הסופים)

מצד אחד - נמצא B מצד שני הוא צירוף לינארי של איברי $B \setminus A$



יהי $U, W \subseteq V$, יהי V .ד. :פ.ז.מ.ד) לדוגמה
 $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ - יצא

לדוגמה
 4 זמנים W - ! 3 זמנים יהי U , 5 זמנים יהי V .ד.
 ? $\dim(U \cap W)$ מה המספר הגדול ביותר

$\dim(U+W) \leq \frac{\dim(V)}{5} \Leftrightarrow U+W \subseteq V$ יצא $U, W \subseteq V$ - לדוגמה
 פ.ז.מ.ד) לדוגמה $U \cap W$ $\subseteq V$ - יצא

$$5 \geq \dim(U+W) = \underbrace{\dim(U)}_3 + \underbrace{\dim(W)}_4 - \dim(U \cap W)$$

$\dim(U \cap W) \geq 7 - 5 = 2$ \Leftarrow

$U \cap W \subseteq V$ \wedge $U \cap W \subseteq U$ \wedge $U \cap W \subseteq W$
 \Downarrow $\dim(U \cap W) \leq \dim(V) = 5$ \wedge $\dim(U \cap W) \leq \dim(U) = 3$ \wedge $\dim(U \cap W) \leq \dim(W) = 4$

$\dim(U \cap W) \leq 3$ \Leftarrow

מה המספר הגדול ביותר
 2, 3 \Leftarrow

$2 \leq \dim(U \cap W) \leq 3$ \Leftarrow \cup \cap \subseteq \subseteq \subseteq

$\dim(U) = n-1$ - \Rightarrow $U \subset V$ by linearity U, W , n dimensions in V : free
 $W+U=V$ \Rightarrow $W \not\subseteq U$

V is formed by two independent lines U, W \Rightarrow $U, W \subseteq V$ \Rightarrow $U+W=V$

$\dim(U+W) = \dim(V) = n$

$\dim(U+W) = \underbrace{\dim(U)}_{n-1} + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

$\dim(U \cap W) < \dim(W)$

$\Leftrightarrow 0 < \dim(W) - \dim(U \cap W) \Leftrightarrow$

$\dim(W) - \dim(U \cap W) \geq 1$

$n-1 + \dim(W) - \dim(U \cap W) \geq n-1 + 1 = n$

$U+W \subseteq V \Rightarrow \dim(U+W) \leq \dim V = n$
 $\dim(U+W) = n = \dim V \Rightarrow U+W=V$



מרחב האפס של המטריצה
או במילים אחרות אוסף כל
הפתרונות של הממ"ל
ההומוגנית שזו מטריצת
המקדמים שלה.

$$W_1 = N \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = sp \left\{ \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$

W_1, W_2

מימד לבסיס

הקבוצה $V = \mathbb{R}^3$ היא

(2-3)

\mathbb{R}^3



W_1

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

W_1 $\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ בסיס
 1-שני וקטורים בסיסיים
 $W_1 = \text{span} \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$
 $\dim(W_1) = 2$

W_2

לפי הצורה של המטריצה $\text{span} \rightarrow$ קצת קשה לראות

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ 0 & * & * \end{pmatrix}$$

$0 = 4t$
 $\dim(W_2) = 2$

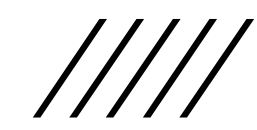
$\dim(W_2) = 2$

לכן נראה שיש $\text{span} \rightarrow W_1 \cup W_2$ בסיס

$$W_1 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2t \\ t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} \iff \begin{cases} -y + 2t = 0 \\ \boxed{2t = y} \\ x + 2t - 2t = 0 \\ \iff \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W_1 + W_2 = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix} \right\}$$



$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{4}R_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ 6 & 11 & 12 \end{pmatrix}$$

$$R_3 = R_3 - 6R_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

$$R_2 = \frac{1}{2}R_2$$

$$R_3 = R_3 + \frac{3}{2}R_2$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

-L2-piv pivot

L2-pivot → 2. Zeile

$$\dim(W_1 + W_2) = 3$$

⇔

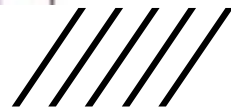
$$\underbrace{\dim(W_1 + W_2)}_3 = \underbrace{\dim(W_1)}_1 + \underbrace{\dim(W_2)}_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

(3=1+2) $\dim(W_1 \cap W_2) = 0$

Lwr

$$\dim(W_1 \cap W_2) = 0$$

⇔





מספר ממשלי n

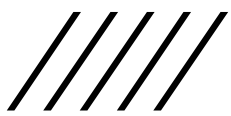
תהי V מרחב וקטורי מעל F , ויהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס של V . לכל וקטור $v \in V$ קיים ייחודי קואורדינטות $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in F$ כך ש-
 $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$[v]_B \in F^n$$

מאגרת הווקטור v של B (מאגרת)

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

מאגרת n -ית



$$V = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} V = \mathbb{R}^3$$

$$\Rightarrow [v]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad -50$$

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad V = \mathbb{R}^3$$

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad - \text{על } \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix}$$

$[v]_B = ?$
 - מציאת המקדמים

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2=R_2-R_1, R_3=R_3-R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=R_3-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_1=R_1+2R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_2=R_2+R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{R_2=-R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array} \right) \xrightarrow{R_3=-R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

$\alpha_3 = 1$ $\alpha_2 = 2$ $\alpha_1 = 0$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$v = 1 + 2x - x^2$ בקוורטות ב $\mathbb{R}_3[x]$:ע"ב
 ב $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3\}$:ע"ב

$$1 + 2x - x^2 = 1 \cdot 1 + 2 \cdot x + (-1) \cdot x^2 + 0 \cdot x^3$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$v = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ בקוורטות ב $V = \mathbb{R}^2$, $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$:ע"ב
 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \alpha_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$v = \frac{a+b}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{a-b}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} \\ \frac{a-b}{2} \end{pmatrix}$$

אותו רעיון - שיעורי בית!!



תכונות של קו-בסיס:

קיימת $[u_1]_B, \dots, [u_k]_B \iff$ קיימת u_1, \dots, u_k (1)

$[w]_B \in \text{span}\{[u_1]_B, \dots, [u_k]_B\} \iff w \in \text{span}\{u_1, \dots, u_k\}$ (2)

ללא הוכחה

$[w]_B \in \text{span}\{[u_1]_B, \dots, [u_k]_B\}$

לפי (1)

קיימת u_1, \dots, u_k

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i = 0$$

\iff קיימת u_1, \dots, u_k

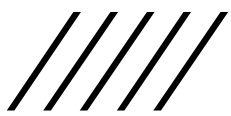
בני $V = \{u_1, \dots, u_k\}$

$\forall u_i, u_j \in V \implies u_i + u_j \in V$ ו- $\forall \alpha \in F, u_i \in V \implies \alpha u_i \in V$

לפי (2)

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i [u_i]_B = [\sum_{i=1}^k \alpha_i u_i]_B$$

$\in \text{span}\{[u_1]_B, \dots, [u_k]_B\}$



$$\alpha [u_i]_B = [\alpha u_i]_B \quad \text{הגדרה} \quad \rightarrow \quad [u_1]_B + [u_2]_B = [u_1 + u_2]_B \quad \text{הגדרה}$$

$$u_1 = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$u_2 = \beta_1 v_1 + \dots + \beta_n v_n$$

$$[u_1]_B + [u_2]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$[u_1 + u_2]_B = \left[\begin{pmatrix} (\alpha_1 + \beta_1) v_1 \\ \vdots \\ (\alpha_n + \beta_n) v_n \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} \alpha_1 + \beta_1 \\ \vdots \\ \alpha_n + \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\alpha \cdot [u_1]_B = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$[\alpha \cdot u_1]_B = \left[\begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha_1 v_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot \alpha_n v_n \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} \alpha \cdot \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot \alpha_n \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i=1}^k d_i u_i = 0 \iff \left[\sum_{i=1}^k d_i u_i \right]_B = [0]_B \iff \forall i : d_i = 0$$

\iff פירוט של 25

$$\sum_{i=1}^k d_i [u_i]_B = 0 \implies \forall i : d_i = 0$$

\iff $[u_1]_B, \dots, [u_k]_B$



סקאלר: \mathbb{F} בקטור תחום של גורם ליניאר הוא תמיד קטן מרחב וקטורי. אם תמיד תחשב

הכלל תמיד של וקטור קוורטרן אל מרחב וקטורי:

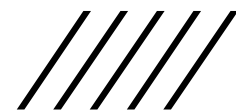
יהי V מרחב וקטורי (או מרחב) B בסיס של V . מרחב קוורטרן של B : $[V]_B = \{ [v]_B \mid v \in V \}$

מוצגים להוכיח שקיים!!!

תוצאות: $v \in V$, $w_1, w_2 \in V$ ו- B בסיס

$$[w_1 \cap w_2]_B = [w_1]_B \cap [w_2]_B \quad (1)$$

$$[w_1 + w_2]_B = [w_1]_B + [w_2]_B \quad (2)$$



$$V_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, V_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{בסיס של } \mathbb{R}^2 \text{ אז } V = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \text{ בסיס חדש}$$

$$V_3 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 10 & 10 \end{pmatrix}$$

הבסיס החדש הוא $\{V_1, V_2, V_3\}$

יש להציג את המטריצה V ואת וקטור v במונחי הבסיס החדש. כלומר, למצוא את המקדמים d_1, d_2, d_3 כך ש:
 $v = d_1 V_1 + d_2 V_2 + d_3 V_3$

$$[V_1]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, [V_2]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, [V_3]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 10 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 4 \end{array} \right) \xrightarrow{R_1 = R_1 - R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 10 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & 4 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{\substack{R_3 = R_3 - 2R_1 \\ R_4 = R_4 - R_1}} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \end{array} \right) \xrightarrow{R_4 = R_4 - R_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

$$d_1 + 2d_2 + 2d_3 = 1$$

$$d_1 + 2d_2 = 2$$

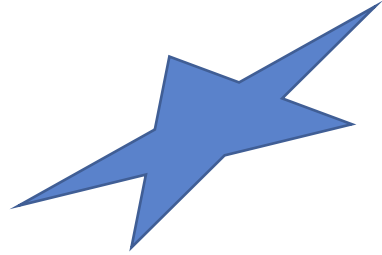
$$10d_3 = 5 \Rightarrow d_3 = \frac{1}{2}$$

$$d_2 = -1$$

$$d_1 = 1$$

$$v = 1 \cdot V_1 + 1 \cdot V_2 + \frac{1}{2} \cdot V_3$$

התוצאה היא $d_1=1, d_2=1, d_3=\frac{1}{2}$



בהצלחה!!!

