תרגול 7 - אושרית

משפט השלישי חינם, מציאת בסיס לחיתוך ולסכום מרחבים, משפט המימדים ווקטורי קורדינטות ככלי למציאת בסיסים

משפט השלושה חינם:

יהי V מ"ו - ! $S\subseteq V$ תק, אם שניים מתוך השלושה מתקיימים, השלישי מתקיים בהכרח (מחייב) ומתקיים

ש-S היא בסיס ל-V: 1) S בת"ל

2) $span(S)=V$

3) $\#S = \dim V$ (# - מס' האיברים בקבוצה)

תרגיל (תוצאה): יהי V מ"ו מעל F. יהי $W\subseteq V$ תת מרחב מאותו מימד סופי, ונסמנו ב-n.

צ"ל: $W=V$.

פתרון:

נבחר $B=\{w_1,\dots,w_n\}$ בסיס ל-W מפרט מתקיים כי:

1) $span(B)=W$ 2) B בת"ל.

לפי השלושה חינם, נניח ש-B בת"ל + $\#B=\dim V=n \Rightarrow span(B)=V$

$\Rightarrow W=V$.

במילים - תת מרחב בפרט של מרחב אחר מאותו מימד- שווים.

זה נותן לנו שיטת הוכחה מאוד חזקה לשיוויון מרחבים.
הכלה חד כיוונית ושיוויון מימדים

תרגיל:

יהא $V=\mathbb{R}_2[x]$ - מצא בסיס לחיתוך בין $W_1=\{p(x)\in V \mid p(1)=0\}$ $W_2=\{p(x)\in V \mid p(2)=0\}$

החיתוך הוא - פשוט ← $W=\{p(x)\in V \mid p(1)=p(2)=0\}$

מתקיים ש- $p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2$, $p(2)=a_0+a_1\cdot 2+a_2\cdot 2^2$, $p(1)=a_0+a_1+a_2$

$$p(2)=a_0+2a_1+4a_2$$

$$a_0+2a_1+4a_2=0 \ \wedge\ a_0+a_1+a_2=0$$

קיבלנו שני-מערכת משוואות לא שלמה חופשי-אחד (מערכת של 2 משוואות ו-3 נעלמים)

לכן - המימד של W הוא - 1.

לפי משפט השארית אין - מספיק למצוא - $p(x)\in W$ וכי - הוא יהוה בסיס, לדוג': $p(x)=(x-1)(x-2)$

מי שלא רואה שידרג ויגלה זאת...

תרגיל: (גם שימושי...)

יהיו V מ״ו, B קב׳ מוכלת ב-V

הוכח - התנאים הבאים שקולים:

1) B בסיס עבור V.

2) וקטור האפס אינו שייך ל-B ולכל תת קב׳ $A \subseteq B$ מתקיים $V = span(A) \oplus span(B \setminus A)$

פתרון:

$1 \Rightarrow 2$: נניח B בסיס ל-V, ברור מכך ש-B בת״ל שבסיס אינו יכול להכיל את אפס. תהי A קב׳ המוכלת ב-B.

נסמן בה״כ $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ $A = \{v_1, \ldots, v_j\}$. יש להוכיח - מספיק שמתקיים -

$V = span\{v_1, \ldots, v_j\} \oplus span\{v_{j+1}, \ldots, v_n\}$. לצורך כך - יש להוכיח 2 דברים:

תנאי 1: $span\{v_1, \ldots, v_j\} \cap span\{v_{j+1}, \ldots, v_n\} = \{0\}$

תנאי 2: $V = span\{v_1, \ldots, v_j\} + span\{v_{j+1}, \ldots, v_n\}$

שימו ♡ שאם $A = \emptyset$, המשפט - נובע בקלות ולכן - נניח מקרה כזה

הוכחת תנאי 1: (הוכ׳) - יהי $v \in span\{v_1, \ldots, v_j\} \cap span\{v_{j+1}, \ldots, v_n\}$ צ״ל $v = 0$.

מהגד׳ החיתוך נובע כי קיימים סקלרים כך ש- $a_1v_1 + \ldots + a_jv_j = b_{j+1}v_{j+1} + \ldots + b_nv_n$

נעביר אגף ונקבל- $a_1v_1 + \ldots + a_jv_j - b_{j+1}v_{j+1} - \ldots - b_nv_n = 0$

כיוון ש-B בת״ל נובע כי כל המקדמים שווים ל-0 ולכן $v = 0$ כנדרש.

התנאי ה-ב:

$$\mathrm{span}\{v_1,\dots,v_j\} + \mathrm{span}\{v_{j+1},\dots,v_n\} =$$
$$= \mathrm{span}\{v_1,\dots,v_j,v_{j+1},\dots,v_n\} = \mathrm{span}(B) = V$$

2 ← 1: מטוון שזה נכון לכל קב' A המוכלת ב-B, לפרט - גם נכון לקב' ריקה.

לכן - יתקיים ש-

$$V = \mathrm{span}\,\emptyset \oplus \mathrm{span}(B/\emptyset) = \mathrm{span}(B)$$

כלומר - B פורשת את V. נותר להראות ש-B בת"ל.

נניח ש-B אינה בת"ל, לכן - וקטור אחד ממנה u הוא צירוף ליניארי של האחרים. נסמן ב-A את היחידון

שמכיל את u כלומר - $A=\{u\}$ ומכיוון שבהכרח - $u\neq0$ ונקבל סתירה לתכונת הסכום הישר (חיתוך שכולל

רק את וקטור האפס)

מצד אחד- נמצא בA מצד שני-הוא
צירוף לינארי של איברי B\A

משפט המימדים: יהי V מ"ו, $U,W\le V$ תת"מ

אז- $\dim(U+W)=\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W)$

תרגיל:

יהי V מ"ו ממימד 5, U תת מרחב ממימד 3 ו- W ממימד 4

מה האפשרויות עבור $\dim(U\cap W)$?

פתרון:

נזכור כאשר- $U,W\le V$ אז: $U+W\le V \Leftarrow \dim(U+W)\le \underbrace{\dim(V)}_{5}$

נשתמש בנוסחה למשפט המימדים:

$$5\ge \dim(U+W)=\underbrace{\underbrace{\dim(U)}_{3}+\underbrace{\dim(W)}_{4}}_{7}-\dim(U\cap W)$$

$$\Leftarrow \boxed{\dim(U\cap W)\ge 7-5=2}$$

אך- מצד שני גם יודעים

$$U\cap W\le V \;\wedge\; U\cap W\le U$$

$$\dim(U\cap W)\le\dim(V)=4 \;\wedge\; \dim(U\cap W)\le\dim(U)=3$$

$$\Leftarrow \boxed{\dim(U\cap W)\le 3}$$

לכן - הוא נקבל כי

$$2\le\dim(U\cap W)\le 3 \Rightarrow \boxed{\text{האפשרויות עבור הן } 2,3}$$

תרגיל: V מ"ו ממימד n, U,W תמ"ו של V כך ש- $\dim(U)=n-1$

$W \nsubseteq U$ **צ"ל:** $W+U=V$

הוכחה: נוכיח לפי הגדרה חד כיוונית ושוויון מימדים.

ראשית $U,W \leq V \Leftarrow W+U \subseteq V$ כי סכום הוא התמ"ו הקטן ביותר שמוכל ב- V.

נותר להראות כי $\dim(W+U)=\dim(V)$

לפי משפט המימדים - $\dim(U+W)=\underbrace{\dim(U)}_{n-1}+\dim(W)-\dim(U\cap W)$

מכיוון ש- W לא מוכל ב- U נקבל כי: $\dim(U\cap W)<\dim(W)$

$$\Leftarrow \quad 0<\dim(W)-\dim(U\cap W) \quad \Leftarrow$$

$$\dim(W)-\dim(U\cap W)\geq 1$$

לכן - נקבל -

צד 1 - $n-1+\dim(W)-\dim(U\cap W)\geq n-1+1=n$

צד 2 - $\dim(U+W)\leq \dim V=n$ לפי הגדרה $U+W\subseteq V$

$\Leftarrow$ $\dim(U+W)=n=\dim V$

תרגיל: יהי $V=\mathbb{R}^3$

נגדיר -

$$W_1 = N\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 8 \\ 3 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = sp\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 11 \\ 12 \end{pmatrix}\right\}$$

מצא - מימד לבסיס $W_1 \cap W_2$

מרחב האפס של המטריצה או במילים אחרות אוסף כל הפתרונות של הממ"ל ההומוגנית שזו מטריצת המקדמים שלה.

$\boxed{W_1}$

$$\begin{pmatrix}1&1&2\\2&0&8\\3&0&12\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&4\\1&0&4\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\1&0&4\\0&0&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&1&2\\0&-1&2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

פתרון: מצאנו את הבסיס של W_1

יש לנו איבר חופשי 1

ולכן - המימד של W_1

הוא - 1.

$\boxed{W_2}$:

בגלל שהמטריצה מוצגת כ- span שלה קל לפרש, מספיק לדרג שבה.

$$\begin{pmatrix}4&5&6\\10&11&12\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{5}{4}&\frac{6}{3}\\10&11&12\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&\frac{5}{4}&\frac{6}{4}\\0&\underbrace{*\quad *}_{\text{שונה מ-0}}\end{pmatrix}$$

$\Leftarrow$ אין - חופשי

$\Leftarrow\ \dim(W_2)=2$

מכיוון שנתון W_1 כ- span זה מקצר את הפתרון הכללי

$$W_1=span\left\{\begin{pmatrix}0\\2t\\t\end{pmatrix}\middle| t\in\mathbb{R}\right\}\Leftarrow\begin{cases}-y+2t=0\\ \boxed{2t=y}\\ x+2t-2t=0\\ \quad\Downarrow\\ x=0\end{cases}\qquad z=y \quad (\text{כאן})$$

$$\Downarrow$$

$$span\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$$

$$W_1+W_2=sp\left\{\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}4\\5\\6\end{pmatrix},\begin{pmatrix}10\\11\\12\end{pmatrix}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 = \frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ 10 & 11 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_3 = R_3 - 10R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow[R_3 = R_3 + \frac{3}{2}R_1]{R_1 = \frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 1 & \frac{5}{4} & \frac{6}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{9}{4} \end{pmatrix}$$

מצאנו שלוש בת"ל -

אין שורת אפסים ולכן בת"ל.

$$\dim(W_1+W_2) = 3 \quad \Leftarrow$$

לפי משפט המימדים (מ"מ)

$$\underbrace{\dim(W_1+W_2)}_{3} = \underbrace{\dim(W_1)}_{1} + \underbrace{\dim(W_2)}_{2} - \dim(W_1 \cap W_2)$$

לכן

$$\boxed{\dim(W_1 \cap W_2) = 0} \quad \Leftarrow$$

וקטור קואורדינטות :

הגדרה: יהי V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$, ויהי $B=\{v_1,...,v_n\}$ בסיס ל-V ויהי $v\in V$ וקטור.

נזכיר ש-v ניתן להצגה יחידה כצ"ל של B וההצגה של לפי הבסיס היא n-וקטור שמורכב מהמקדמים של הצ"ל.

באופן פורמלי - ההצגה של v לפי B הוא וקטור קורדינטות המסומן $[v]_B\in\mathbb{F}^n$

ומוגדר להיות $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$ כאשר $v=\alpha_1v_1+...+\alpha_nv_n$

דוגמה: $V=\mathbb{R}^3$ $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$, $v=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

לכן: $[v]_B=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$ כי: $v=3\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

דוגמה: $V=\mathbb{R}^3$ $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}\right\}$ $v=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

צ"ל: $[v]_B=?$

פתרון: נמצא את $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ כך ש- $\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$

ונקבל את- $[v]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\1&0&2&2\\1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_2=R_2-R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&3\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1-R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\0&0&1&1\\1&0&1&1\end{array}\right)\xrightarrow{R_3=R_3-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&2\\0&0&1&1\\1&0&0&0\end{array}\right)$$

$\boxed{\alpha_3=1}$ $\boxed{\alpha_2=2}$ $\boxed{\alpha_1=0}$ $\Leftarrow$

$\boxed{[v]_B=\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}}$

דוגמה: חשב את הקואורדינטות של הוקטור $v=1+2x-x^2$ לפי הבסיס הסטנדרטי S של $\mathbb{R}_3[x]$

פתרון: $S=\{1,x,x^2,x^3\}$

$$1+2x-x^2 = 1\cdot 1+2\cdot x+(-1)\cdot x^2+0\cdot x^3$$

$$\Leftarrow \quad [v]_S = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}$$

תרגיל: $B=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}\right\}$, $V=\mathbb{R}^2$ מצאו את הקואורדינטות של $v=\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}$ לפי הבסיס B.

סוף-אותו תהליך בדיוק של מציאת המקדמים α_1 , α_2 כך שמתקיים

$$\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

מצאנו ומקבלים -

$$v=\frac{a+b}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{a-b}{2}\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$$

$$\Leftarrow \quad [v]_B=\begin{pmatrix}\frac{a+b}{2}\\ \frac{a-b}{2}\end{pmatrix}$$

אותו רעיון –שיעורי בית!!

תכונות של קורדינטות:

1' $u_1,\dots,u_k$ בת"ל $\longleftrightarrow$ $[u_1]_B,\dots,[u_k]_B$ בת"ל

2' $w\in span\{u_1,\dots,u_k\}$ $\longleftrightarrow$ $[w]_B\in span\{[u_1]_B,\dots,[u_k]_B\}$

ללא הוכחה

הערה!

נוכיח את תכונה (1)

$u_1,\dots,u_k$ בת"ל $\longleftrightarrow$ $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\cdot u_i=0$

תזכורת: יהי V מ"ו מעל F, $B_V=\{v_1,\dots,v_n\}$

$u_1,\dots,u_k\in V$ ו- $\alpha_1,\dots,\alpha_k\in F$

אז: $\sum_{i=1}^{k}\alpha_i[u_i]_B=[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i]_B$

פתרון: נוכיח ♡ - יעזור -

א) $[u_1]_B+[u_2]_B=[u_1+u_2]_B$ וגם ב) $\alpha[u_1]_B=[\alpha u_1]_B$ הטענה

וזה - המוגדר לכל חבל (נובע מ- איזומורפיזם).

הוכ':

א) $\begin{cases} u_1=\alpha_1 v_1+\dots+\alpha_n v_n \\ u_2=\beta_1 v_1+\dots+\beta_n v_n \end{cases}$ מיחידות ההצגה לפי הבסיס.

⇐ אגף שמאל:

$$[u_1]_B+[u_2]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\beta_1\\ \vdots\\ \beta_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

אגף ימין:

$$[u_1+u_2]_B\left[\begin{pmatrix}(\alpha_1+\beta_1)v_1\\ \vdots\\ (\alpha_n+\beta_n)\cdot v_n\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \vdots\\ \alpha_n+\beta_n\end{pmatrix}$$

וזהו - מתקיים שוויון

ב) אגף שמאל:

$$\alpha\cdot[u_1]_B=\alpha\cdot\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\cdot\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha\cdot\alpha_n\end{pmatrix}$$

אגף ימין:

$$[\alpha\cdot u_1]_B=\left[\begin{pmatrix}\alpha\cdot\alpha_1 v_1\\ \vdots\\ \alpha\alpha_n v_n\end{pmatrix}\right]_B=\begin{pmatrix}\alpha\cdot\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha\cdot\alpha_n\end{pmatrix}$$

וזהו - מתקיים שוויון.

תנאי ראשון שלנו -

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i=0 \longleftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{k}\alpha_i u_i\right]_B=[0]_B \Rightarrow \forall i:\alpha_i=0$$

$\Longleftrightarrow$ לפי הגדרה 257

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha_i[u_i]_B=0 \Longrightarrow \forall i\ \alpha_i=0$$

$\Longleftrightarrow$

$[u_1]_B,\dots,[u_k]_B$ בת"ל.

/////

מסקנה: כל בדיקה/חישוב של תלות לינארית או פרישה בכל מרחב וקטורי, ניתן לעשות במרחב וקטורי המוכר והנוח $\mathbb{F}^n$.

הכללה: הגדרה של וקטור קואורדינטות לכל מרחב וקטורי:

יהי V מ"ו (או תמ"ו) ויהי B בסיס שלו. נגדיר- מרחב הקואורדינטות לפי B: $[V]_B = \{[v]_B \mid v \in V\}$

הגדרה: V מ"ו, $W_1, W_2 \le V$ תמ"ו, B- בסיס.

צ"ל-

1) $[W_1 \cap W_2]_B = [W_1]_B \cap [W_2]_B$

2) $[W_1 + W_2]_B = [W_1]_B + [W_2]_B$

מזמינים להוכיח בבית!!..

תרגיל: נגדיר 2 תת מרחבים של $\mathbb{R}_3[x]$

$$V=\{p(x) \mid p(2)=0\} \qquad U=\{p(x) \mid p(1)=0\}$$

מצא: מימד חיתוך המרחבים.

פתרון:

שימו ♡ - כאשר מבקשים חיתוך של תת מרחבים נוח להחליף ב 1 מהמרחבים המקבילים של וקטורים

משוואות הומוגניות לפתור עם 2 המשוואות המקוריות.

לכן: (הגדרה כללית - נכתוב איך נראה פולינום $p(x)$ כללי ב $\mathbb{R}_3[x]$

$$p(x)=a+bx+cx^2+dx^3$$

$$V=\{p(x) \mid p(2)=0\} = \{a+bx+cx^2+dx^3 \mid a+2b+c\cdot 4+d\cdot 8=0\}$$

$$E=\{1,x,x^2,x^3\}$$

כעת- נרצה לעבור לוקטורים כי זה נוח יותר לנו - נעבור לפי הבסיס הסטנדרטי.

$$[V]_E=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \middle| a+2b+c\cdot 4+8\cdot d=0\right\}$$

באותו האופן נעשה עבור U ונקבל:

$$[U]_E=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \middle| a+b+c+d=0\right\}$$

$$[V]_E \cap [U]_E=\left\{\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\\d\end{pmatrix}=0\right\}$$

מדרגים את המטריצה ומוצאים פתרון

$$\begin{pmatrix}1&2&4&8\\1&1&1&1\end{pmatrix} \xrightarrow{R_1\leftarrow R_1-R_2} \begin{pmatrix}0&1&3&7\\1&1&1&1\end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}\underline{1}&1&1&1\\0&\underline{1}&3&7\end{pmatrix}$$

יש לנו 2 משתנים חופשיים

c,d

$$\Leftarrow \dim([V]_E \cap [U]_E)=2$$

$$\Leftarrow \boxed{\dim(V\cap U)=2}$$

תרגיל:

האם המטריצה $V=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ היא צ"ל של המטריצות $V_1=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$, $V_2=\begin{pmatrix}1&0\\2&1\end{pmatrix}$, $V_3=\begin{pmatrix}2&2\\10&10\end{pmatrix}$

אם כן- הצג אחת כצ"ל שלהן.

פתרון: ~~[illegible]~~

נעזר ♡ באיזומורפיזם שלנו, רק מטריצות ולא-כל כך נוח לעבוד איתן לכן - כדאי לעבור לקורדינטות שלהן בבסיס הסטנד' ולעבוד איתם.

$$[V_1]_S=\begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix}\quad [V_2]_S=\begin{pmatrix}1\\0\\2\\1\end{pmatrix}\quad [V_3]_S=\begin{pmatrix}2\\2\\10\\10\end{pmatrix}\quad \Leftarrow\quad S=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$$

$$[V]_S=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\end{pmatrix}$$

נדרג לפי שיטה 2.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&2&1\\1&0&2&2\\0&2&10&3\\0&1&10&4\end{array}\right)\xrightarrow{R_1=R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&-1\\1&0&2&2\\0&2&10&3\\0&1&10&4\end{array}\right)\xrightarrow[R_4=R_4-R_1]{R_3=R_3-2R_1}\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&-1\\1&0&2&2\\0&0&10&5\\0&0&10&5\end{array}\right)\longrightarrow$$

$$\begin{array}{c}\begin{array}{ccc}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\end{array}\\\left(\begin{array}{ccc|c}0&1&0&-1\\1&0&2&2\\0&0&1&\frac{1}{2}\\0&0&0&0\end{array}\right)\end{array}$$

$$\Leftarrow\quad \boxed{\alpha_2=-1}\qquad \boxed{\alpha_3=\frac{1}{2}}\qquad \alpha_1+2\cdot\frac{1}{2}=2\quad \boxed{\alpha_1=1}$$

⇐ אכן- צ"ל לינארי ומתקיים:

$$\boxed{V=1\cdot V_1-1\cdot V_2+\frac{1}{2}\cdot V_3}$$

סיכום:

איך בודקים שוקטור הוא צ"ל של אחרים?

1) נתון וקטור ויהי וקטורים שרוצים לדעת האם הוא צ"ל שלהם.

2) מעבירים את כולם לוקטורי קורדינטות לפי הבסיס הסטנדרטי המתאים.

3) פותרים את המערכת $Ax=b$ כאשר עמודות A הם וקטורי הקורדינטות של הק' הפורשת

4) אם אין פתרון למערכת b לא נפרש ע"י האחרים.

5) אם קיים פתרון x אזי הוא מכיל את הסקלרים של הצ"ל של b בהתאם לסדר עמודות A.

בהצלחה!!!