העתקות לינאריות

הגדרה: יהיו V, W שני מ"ו מעל *אותו* שדה $\mathbb{F}$. פונקציה $T : V \to W$ היא הע"ל אם

1. $\forall v_1, v_2 \in V : \ T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2)$
2. $\forall \alpha \in \mathbb{F}, v \in V : \ T(\alpha v) = \alpha T(v)$

(או באופן שקול: אם לכל $v_1, v_2 \in V,\ \alpha \in \mathbb{F}$ מתקיים
$(T(\alpha v_1 + v_2) = \alpha T(v_1) + T(v_2))$

תכונות בסיסיות:

1. $T(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 \overbrace{T(v_1)}^{\in W} + \alpha_2 \overbrace{T(v_2)}^{\in W} + \cdots + \alpha_n T(v_n)$
2. $T(0_V) = 0_W$

דוגמאות

1. יהיו $V = \mathbb{F}^n,\ W = \mathbb{F}^m$ שניהם מעל $\mathbb{F}$. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ אזי העתקה $L_A : V \to W$ המוגדרת $\underset{\in V}{v} \mapsto \underset{\in W}{Av}$ היא הע"ל.

$$\alpha \in \mathbb{F},\ v_1, v_2 \in V \ : \ L_A(\alpha v_1 + v_2) = A(\alpha v_1 + v_2) = \alpha A v_1 + \alpha A v_2 = \alpha L_A(v_1) + L_A(v_2)$$

2. ההעתקה $trace : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ המוגדרת $A \mapsto tr(A)$ היא הע"ל.

$\alpha \in \mathbb{F},\ A, B \in \mathbb{F}^{n\times n}$

$tr(\alpha A + B) = \alpha\, tr(A) + tr(B)$

3. ההעתקה $D : \mathbb{R}_n[x] \to \mathbb{R}_{n-1}[x]$ המוגדרת $p(x) \mapsto \frac{d}{dx}p(x) = p'(x)$ היא הע"ל.

$$D[\alpha p_1(x) + p_2(x)] = (\alpha p_1(x) + p_2(x))' = \alpha p_1(x)' + p_2(x)' = \alpha D[p_1(x)] + D[p_2(x)]$$

4. העתקת הזהות $I : V \to V$ המוגדרת $v \mapsto v$ היא הע"ל.
5. העתקת האפס $0 : V \to W$ המוגדרת $v \mapsto 0$ היא הע"ל.
6. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ מימד n ויהי B בסיס אזי הפונקציה $T : V \to \mathbb{F}^n$ המוגדרת $v \mapsto [v]_B$ היא הע"ל.

דוגמאות נגדיות

1. יהיו $V = \mathbb{R}^2 = W$. אזי העתקה $f : V \to W$ המוגדרת $v \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a^2 \\ b \end{pmatrix}$ אינה הע"ל.

$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ (הוצאת סקלר)

$\begin{pmatrix} 1\cdot 2 \\ 0 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ (לא הוצאנו)

תרגיל

יהיו $T, S : V \to W$ שתי הע"ל. $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V. נניח $T(v_i) = S(v_i)$ לכבל $1 \le i \le n$

הוכח: $T = S$. כלומר לכל $v \in V$ מתקיים $T(v) = S(v)$

n

הוכח בקצרה

משפט ההגדרה

יהיו V, W שני מ"ו מעל $\mathbb{F}$. יהי $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ בסיס ל V ויהיו $w_1, \dots, w_n \in W$ וקטורים כלשהם.

אזי קימת הע"ל יחידה $T : V \to W$ כך ש $T(v_i) = w_i$ לכל i

מסקנה ניתן להגדיר הע"ל יחידה ע"י קביעה לאן ישלח בסיס ל V

דוגמאות

דוגמא 1

$V = \mathbb{R}_2[x]$ מצא את **ה**הע"ל $T : V \to V$ המקימת $T(1) = x + 2,\ T(x) = 1,\ T(x^2) = -2x + 1$. כתוב את העתקה מפורשות, כלומר לאן T שולחת פולינום כללי $a + bx + cx^2$

$T(a+bx+cx^2) = aT(1)+bT(x)+cT(x^2) = a(x+2)+b(1)+c(-2x+1)$

$= (2a+b+c)\cdot 1 + (a-2c)x$

דוגמא 2

יהיו $v_1=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\4\\7\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$

עוד יהיו

$$w_1=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, w_2=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}, w_3=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$$

האם קיימת הע"ל $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ המקיימת $Tv_i=w_i$ לכל i?

פתרון:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\2&1&4\\3&1&7\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-1&2\\0&-2&4\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&3\\0&1&-2\\0&0&0\end{pmatrix}$$

v_3 תלוי ב- v_1, v_2

$v_3=3v_1-2v_2$

לכן: $v_1\to w_1$, $v_2\to w_2$

$$T(v_3)=T(3v_1-2v_2)=3T(v_1)-2T(v_2)=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

אם $T(v_1)=w_1$, $T(v_2)=w_2$, הדרישה $T(v_3)=w_3$ מתקבלת "בחינם"

על מנת להגדיר את הה"ל באופן יחיד, נשלים את v_1,v_2 לבסיס של $\mathbb{R}^3$

$B=\{v_1,v_2,\tilde{v}\}$

ההשלמה שלנו

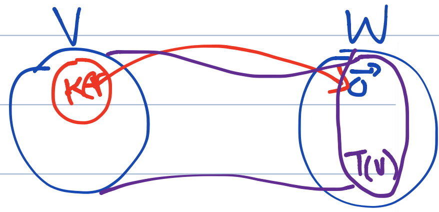
ונגדיר $T(\tilde{v})=0$, $T(v_i)=w_i$, $i=1,2$

1. מה היה קורה אם היינו מחליפים ומגדירים $w_3=\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}$?

לא. כי עפ"י הלינאריות של ההעתקה והתלות של v_3 ב- v_1,v_2 חייב להיות שהתמונה של v_3 היא $\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$

$$T(v_3)=T(3v_1-2v_2)=3T(v_1)-2T(v_2)=3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

גרעין, תמונה ודרגה



תהא $T : V \to W$ הע"ל.

1. הגרעין של T מוגדר $\ker T = \{v \in V \mid T(v) = 0\} \leq V$
2. התמונה של T מוגדרת $ImT = \{T(v) \mid v \in V\} \leq W$
3. הדרגה של T מוגדרת $rank(T) = dim(ImT)$

דוגמאות

1. יהיו $W = \mathbb{F}^m$, $V = \mathbb{F}^n$. תהא $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ונסתכל על העתקה $L_A : V \to W$ המוגדרת $v \mapsto Av$. אזי
   1. $kerT = N(A)$
   2. $ImT = C(A)$
   3. $rankT = rank(A)$

[illegible] $dim(C(A)) + dim(N(A)) = n$

2. יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ מימד n ויהי B בסיס והעל הלינארית $T : V \to \mathbb{F}^n$ המוגדרת $v \mapsto [v]_B$.

אזי
   1. $kerT = \{\vec{0}\}$
   2. $ImT = \mathbb{F}^n$

תרגיל

תהא $T : V \to V$ הע"ל. הוכח
1. $KerT \subseteq KerT^2$
2. $ImT^2 \subseteq ImT$

פתרון:

1. יהי $v \in KerT$. $Tv = 0$, $T(Tv) = T(0) = 0 \Leftarrow v \in KerT^2$.

2. $v \in ImT^2$ $\exists w \in V : T^2(w) = v \leftarrow T(\underbrace{Tw}_{\in V}) = v \leftarrow v \in ImT$

משפט

תהא $T : V \to W$ הע"ל.

אזי T חח"ע ⇔ מתקיים כי $kerT = \{0\}$

תזכורת: T חח"ע $\Longleftrightarrow$ $T(x)=T(y) \Rightarrow x=y$

תרגיל:

תהא $T : V \to W$ הע"ל. ויהיו $\{v_1, \dots, v_n\}$ וקטורים ב V אזי

1. אם $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$ בת"ל אז $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל
2. אם T חח"ע אז גם הכיוון ההפוך נכון. כלומר אם $\{v_1, \dots, v_n\}$ בת"ל אז $\{Tv_1, \dots, Tv_n\}$

הוכחה

1. $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$ נראה שהצ"ל טריוויאלי. נפעיל T. מלינאריות $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i T(v_i) = 0$ כיוון $T(v_i)$ $\forall i$ בת"ל

$\forall i : \alpha_i = 0 \Leftarrow$ מש"ל.

2. יהי $\underset{T(\vec{0})}{\sum \alpha_i T v_i = 0}$ מלינאריות $T(\vec{0}) = 0 = T(\sum \alpha_i v_i)$ נקבל שחח"ע $\sum \alpha_i v_i = 0$

v_i בת"ל

$\Downarrow$

$\forall i \; \alpha_i = 0$

תרגיל

האם קימת $T : V \to W$ ה"ל חח"ע? $\underbrace{V = \mathbb{R}_2[x]}_{3},\ \underbrace{W = \mathbb{R}^2}_{2}$

(מימדים)

נניח בשלילה T חח"ע. בגלל $1,x,x^2$ בת"ל (בסיס $\mathbb{R}_2[x]$) $T(1), T(x), T(x^2)$ חייבים להיות בת"ל

$\mathbb{R}^2$ ממימד 2 $\Leftarrow$ הקבוצה הבת"ל המקסימלית מגודל 2. בסתירה

תרגיל

האם קימת $T : V \to W$ ה"ל על? $V = \mathbb{R}^3,\ W = \mathbb{R}^4$

נניח בשלילה T על, כלומר יש מקור ל e_1, e_2, e_3, e_4 נסמן את המקורות ב v_i $\quad Tv_i = e_i$

e_1, e_2, e_3, e_4 בת"ל $\Leftarrow$ $v_1 \dots v_4$ בת"ל, אך $v_1 \dots v_4 \in \mathbb{R}^3$ ממימד 3, הבת"ל המקס' 3

בסתירה.

תרגיל

תהא $T: V \to W$ ה"ל. תהא $A \subseteq V$ תת קבוצה. אזי $T(span(A)) = spanT(A)$

הוכחה:

$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \qquad v_i \in A$

$T(span(A)) \ni Tv = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{Tv_i}_{\in T(A)} \in span(T(A))$

הכיוון השני דומה (עד כדי)

מסקנה: לכל תת מרחב $W \leq V$ מתקיים כי $T(W)$ תת מרחב.

תרגיל

יהיו $V=\mathbb{R}^3,\ W=\mathbb{R}^2$ והמישור

$$U=\left\{\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} : x+y+z=0\right\} = span\underbrace{\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right\}}_{B} \le V$$

מצא ה"ל $T: V \to W$ כך ש $kerT=U$ וגם $ImT = span(\{\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\})$

פתרון

נשלים את B לבסיס של V. $\left\{v_1=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, v_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}, v_3=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$

עפ"י משפט ההגדרה מספיק להגדיר ה"ל על הבסיס.

נדרוש לכל U להתאפס ל-0. $\longrightarrow$ $T(v_1)=T(v_2)=0$

$T(v_3)=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$$T(\underbrace{span\{v_1,v_2\}}_{U}) = span\{Tv_1,Tv_2\} = span\{0\} = \{0\}$$

$$U \subseteq Ker(T)$$

$v=\alpha_1 v_1+\alpha_2 v_2+\alpha_3 v_3 \in KerT$ $\quad 0=Tv=\alpha_1 Tv_1+\alpha_2 Tv_2+\alpha_3 Tv_3=\alpha_3\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$

$\alpha_3=0 \Rightarrow v\in U$.

תרגיל

תהא $T : V \to V$ הע"ל, $W \leq V$ ת"מ. נתון כי $W \cap KerT = 0$. הוכח כי $\dim W = \dim T(W)$

הוכחה:

נסתכל על הצמצום: $T_W : W \to V$. מתקיים $KerT_W = 0 = W \cap KerT$

$\Downarrow$

T_W חח"ע.

אם נבחר בסיס B ל-W, $T(B)$ גם כן בסיס ב-$(T(W))$.

$\dim W = |B| = |T(B)| = \dim T(W)$

משפט הדרגה

$n=\dim(C(A))+\dim(N(A))$

$\mathbb{F}^{m\times n}$

תהא $T : V \to W$ הע"ל. אזי $\dim ImT + \dim KerT = dimV$

הערה: שימו לב שזה הכללה עבור מטריצה $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$ ומשפט
$\dim C(A) + \dim N(A) = n$ (זיכרו שמטריצה היא מקרה פרטי של ה"ל)

תרגיל

נסתכל על ה"ל $T : \mathbb{F}^{n\times n} \to \mathbb{F}$ המוגדרת $T(A) = tr(A)$ מצא בסיס לגרעין העתקה.

פתרון:

$tr\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=tr\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ לא חח"ע.

$tr(A)$ היא על כי לכל $a\in\mathbb{F}$ למשל: $a\cdot E_{1,1}$

$\dim ImT = \dim\mathbb{F}=1$

$\dim KerT=\dim V-\dim ImT=n^2-1$

ע"פ שלוש חום, מספיק למצוא קבוצה בת"ל של n^2-1 מטריצות ששייכות ל Ker

$\begin{pmatrix}0&1&\\0&0&7\\0&0&0\end{pmatrix}$

$\underbrace{\{E_{ij} \mid i\neq j\}}_{(n^2-n)} \cup \{E_{11}-E_{ii} \mid 2\le i\le n\}^{(n-1)}$

$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$

$n^2-n+n-1=n^2-1$

הפיכות ואיזומורפיזם

ה"ל $T: V \to W$ היא הפיכה אם יש הע"ל $S: W \to V$ כך ש: $ST = Id_V, TS = Id_W$.
במקרה זה מסמנים $T^{-1} = S$

משפט

T הפיכה אמ"מ T חח"ע ועל

(שימו לב שידוע ש**פונקציה** חח"ע ועל היא הפיכה כפונקציה. המשפט אומר שבמקרה זה **הפונקציה** היא הע"ל)

תכונות

1. אם T הפיכה אז גם ההופכית ומתקיים $(T^{-1})^{-1} = T$
2. יהיו $T, S: V \to V$ שתי הע"ל אזי T, S הפיכות אמ"מ ההרכבה ST הפיכה. במקרה זה מתקיים $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$
3. אם ה"ל $L_A(v) = Av$ הפיכה אז ההופכית היא $L_{A^{-1}}$

איזומורפיזם

הגדרה הע"ל $T: V \to W$ תקרא

1. מונומורפיזם אם T חח"ע
2. אפימורפיזם אם T על
3. איזומורפיזם אם T חח"ע ועל (כלומר הפיכה). במקרה זה נאמר ש V ו W איזומורפים ונסמן $V \cong W$

הערה: $\cong$ מתנהג כמו יחס שקילות. כלומר

1. $\forall V: V \cong V$
2. $V \cong W \Rightarrow W \cong V$
3. $V_1 \cong V_2 \wedge V_2 \cong V_3 \Rightarrow V_1 \cong V_3$

הערה 2 מרחבים איזומורפים בעצם אומר שהם "אותו דבר" במובן מסוים. יש להם אותו מבנה במובן שאם "נטשטש" את זהות האיברים ונסתכל רק על המבנה (למשל שחיבור של שני וקטורים מסוימים שווה וקטור מסוים אחר) אז נראה אותו דבר בשני המרחבים.

דוגמא: $T: \mathbb{F}^{m\times n} \to \mathbb{F}^{n\times m}$ המוגדרת $T(A) = A^t$ היא איזומורפיזם.