

מבחן בדידה קיץ תשפא

כ"ב אלול תשפ"א, 30.8.2021

מרצים: עדי בן צבי, תמר בר-און, אריאל ויצמן, אלעד עטיי, ארז שיינר.
מתרגלים: אחיה בר-און, תמר בר-און, גיא ברגר, עוזי חרוש, עידו פלדמן, נעם פרץ, גלעד פורת קורן, הראל רוזנפלד.
הנחיות:

- ענו על כל השאלות.
 - חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.
 - השאלות לא מסודרות בהכרח לפי רמת קושי- מומלץ להתחיל עם שאלות שאתם יודעים לפתור.
- המלצה: הסתכלו על כל השאלות והתחילו עם השאלות שאתם יודעים לענות. חלקו את זמנכם בתבונה!.

תשובות יש לכתוב על גבי הטופס בלבד. מחברת הטיוטה לא תבדק.

ניתן לענות משני צידי הדף.

בהצלחה!

1. (20 נק') תהינה A, B, C קבוצות. הוכיחו או הפריכו כל אחד מהסעיפים הבאים:

(א) $A \setminus (B \setminus A) = A \setminus (C \setminus A)$

(ב) $P(A \setminus P(B)) \neq P(A) \setminus (P(B) \cup P(P(B)))$

(ג) אם $A \subseteq B$ וגם $A \setminus C \neq \emptyset$ אזי $B \setminus C \neq \emptyset$

(ד) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

2. (21 נק') נגדיר יחס S על קבוצת הממשיים \mathbb{R} כך: לכל $a, b \in \mathbb{R}$

$$aSb \iff [(a = b) \vee (b - a > 1)]$$

(א) הוכיחו כי S יחס סדר חלקי על \mathbb{R} .

(ב) מצאו את כל האיברים המינימאליים בקבוצת הטבעיים \mathbb{N} (שמוכלת ב \mathbb{R}), לפי היחס S (הניחו כי $0 \notin \mathbb{N}$).

(ג) האם לקבוצה

$$(0, 1) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$$

יש חסם עליון (sup)? אם כן, מצאו אותו. אחרת, הוכיחו שלא קיים.

3. (21 נק') תהא $B \neq \emptyset$ קבוצה לא ריקה ונסמן $X = B^B$ את קבוצת כל הפונקציות מ B ל B . נגדיר יחס \sim על X כך: לכל $f, g \in X$ מתקיים: $f \sim g$ אם ורק אם קיימת $h \in X$ הפיכה כך ש $f \circ h = h \circ g$.

(א) הוכיחו כי \sim יחס שקילות על X .

(ב) עבור פונקצית הזהות $I \in X$ מצאו את מחלקת השקילות $[I]_{\sim}$.

(ג) תהא $f \in X$ המקיימת שלכל $b_1, b_2 \in B$ מתקיים $f(b_1) = f(b_2)$. הוכיחו כי $|[f]_{\sim}| = |B|$.

4. (24 נק') נסמן $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ את קבוצת כל הפונקציות מ \mathbb{R} ל \mathbb{R} . נגדיר פונקציה $H : A \times A \rightarrow A \times A$ על ידי הכלל:

$$H((f_1, f_2)) = (f_1 \circ f_2, f_2 \circ f_1)$$

(א) הוכיחו או הפריכו: H פונקציה חח"ע.

(ב) מצאו פונקציה $g \in A$ כך ש $(I, g) \notin \text{Im}H$ (כאשר $I \in A$ היא פונקצית הזהות).

(ג) תהינה $g_1, g_2 \in A$ פונקציות הפיכות. הוכיחו/הפריכו: $(g_1, g_2) \in \text{Im}H$.

(ד) מצאו את העוצמה של $\text{Im}H$ (התשובה חייבת להיות אחת מהבאות: מספר n טבעי או אפס, $\aleph_0, \aleph, 2^{\aleph}$).

5. הגדרה: קבוצה $C \subseteq \mathbb{R}$ תקרא מגניבה אם: לכל $x_1, x_2 \in C$ כך ש $x_1 \neq x_2$ מתקיים ש $x_1 - x_2 \notin \mathbb{Q}$.

(א) (5 נק') הוכיחו שקיימת קבוצה $S \subseteq \mathbb{R}$ מגניבה וגם ש S אינה מוכלת באף קבוצה מגניבה אחרת.

(ב) (15 נק') נתייחס ל S מהסעיף הקודם. ענו על השאלות הבאות:

i. הוכיחו שלכל $y \in S$ קיים $x \in S$ כך ש $y - x \in \mathbb{Q}$.

ii. הוכיחו שקיימת פונקציה חח"ע ועל $f : S \times \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}$.

iii. הוכיחו/הפריכו: $|S| = \aleph$.