מבנים אלגבריים*

תרגיל בית 7†

תזכורות ומושגים

- הומומורפיזם של חבורות f הוא פונקציה בין חבורות $f\colon G\to H$ המקיימת, לכל $g_1,g_2\in G$, את השויון $f(g_1)f(g_2)=f(g_1g_2)$. אם f חח"ע אז הוא נקרא מונומורפיזם. אם f על אז הוא נקרא אפימורפיזם. אם f חח"ע ועל אז הוא נקרא איזומורפיזם.

- יהיו G,H חבורות. אם קיים איזומורפיזם $f\colon G\to H$ אז אומרים ששתי החבורות איזומורפיות זו לזו, ומסמנים $G\cong H$.

- יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. נסמן $\ker f=\{g\in G\colon f(g)=e_H\}$. זהו הגרעין של ההעתקה f.

- יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. נסמן $\mathrm{Im}f=\{h\in H\colon \exists g\in G, f(g)=h\}$. זו התמונה של ההעתקה f.

- מתקיים $\ker f\lhd G$ וכן $\mathrm{Im}f\le H$. $\ker f=\{e_G\}$ אם ורק אם f מונומורפיזם.

- נניח f הומומורפיזם מחבורה G, ונניח S היא קבוצה יוצרת של חבורה G. אם נתונים ערכי f על איברי S, אז ניתן לקבוע באופן יחיד את f. מנגד, אם נתונים ערכי העתקה g על איברי S, לא בטוח שניתן להשלים את ערכי g להומומורפיזם.

- משפט האיזומורפיזם הראשון: יהי $f\colon G\to H$ אפימורפיזם. אזי ההעתקה המושרה $\tilde{f}\colon {}^{G}/_{\ker f}\to H$ היא איזומורפיזם. לשון אחר: יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם. אזי ההעתקה המושרה $\tilde{f}\colon {}^{G}/_{\ker f}\to \mathrm{Im}f$ היא איזומורפיזם.

שאלה 1 תהיינה G,H חבורות.

1. נגדיר העתקה $f\colon G\to G\times H$ על ידי $g\overset{f}{\mapsto}(g,e_H)$. הראו כי f הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\mathrm{Im}f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

---

*נא לרשום על התרגיל את שם התלמיד, מספר זיהוי ומספר קבוצה.

†יש להגיש בשיעור התרגיל בפרשת בא:

קבוצה 03 – הגשה בשיעור ביום שני, כ"ז בטבת (30 דצמ').

שאר הקבוצות – הגשה בשיעור ביום חמישי, א' בשבט (2 ינו').

2. נגדיר העתקה $f\colon G\times H\to G$ על ידי $(g,h)\overset{f}{\mapsto} g$. הראו כי f הומומורפיזם של חבורות, חשבו את הגרעין $\ker f$ ואת התמונה $\mathrm{Im}f$. האם זהו מונומורפיזם, אפימורפיזם או איזומורפיזם?

שאלה 2 בכל סעיף קבעו האם החבורות הן איזומורפיות. הסבירו קביעתכם.

1. $\mathbb{Z}_{11}\times\mathbb{Z}_{11}$ ו $\mathbb{Z}_{121}$.
2. $\mathbb{Z}_{3}\times\mathbb{Z}_{7}$ ו $\mathbb{Z}_{21}$.
3. $\mathbb{R}$ ו $\mathbb{R}^*$. (שימו לב מה פעולת החבורה בשתי החבורות האלו).
4. S_3 ו D_3.
5. S_4 ו D_{12}.
6. D_4 ו Q_8 (חבורת הקווטרניונים, שהופיעה כבר בתרגיל בית 5; שימו לב לתיקון שהובא באתר הקורס לגבי חבורה זו).

הערה בשאלה זו די לציין בפירוש כי העתקה מסוימת היא איזומורפיזם, ללא הוכחה.

שאלה 3 הוכיחו שהחבורה $\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ -b & a\end{pmatrix} : a,b\in\mathbb{R}, (a,b)\neq(0,0)\right\}$ עם פעולת כפל מטריצות היא איזומורפית ל־$\mathbb{C}^*$.

שאלה 4 תהי G חבורה, $H\leq G$, $N\trianglelefteq G$.

1. נסמן $K=H\cap N$. הוכיחו K היא תת־חבורה נורמלית של H.
2. לכל איבר בחבורת המנה $aK\in {}^{H}/_{K}$ נגדיר העתקה $\phi(aK)=aN$. הוכיחו כי ϕ מוגדרת היטב. כלומר, לכל $a,b\in H$, אם $aK=bK$, אזי $\phi(aK)=\phi(bK)$. זאת אומרת שהתמונה של ϕ אינה תלוייה בבחירת נציג מחלקת שקילות ובכך מגדירה פונקציה מ ${}^{H}/_{K}$ ל ${}^{G}/_{N}$.
3. הראו כי ϕ מהסעיף הקודם היא מונומורפיזם.

שאלה 5 יהיו G,H חבורות סופיות. יהי $f\colon G\to H$ הומומורפיזם של חבורות. הוכיחו כי הסדר של התמונה $\mathrm{Im}f$ מחלק את $\gcd(|G|,|H|)$.

שאלה 6 מה האפשרויות ל־$\mathrm{Im}f$ בשני המקרים הבאים:

1. $f:\mathbb{Z}_{15}\to\mathbb{Z}_{18}$.
2. $f:\mathbb{Z}_{15}\to D_5$.

רמז היעזרו בשאלה 5 למציאת הסדרים האפשריים של $\mathrm{Im}f$. לאחר מכן מצאו את כל התת"ח של H מסדרים אלו.

שימו לב! לכל אפשרות שמצאתם ל־$\mathrm{Im}f$, יש להראות כי קיים הומומורפיזם f תואם. הדרך הנוחה ביותר להראות קיום היא למצוא הומומורפיזם כזה. בשאלה זו די לציין את ההומומורפיזם f, בלא כל הוכחה לגביו.

3. (רשות) מצאו כמה הומומורפיזמים שונים יש בשני מקרים אלו.

שאלה 7 נניח כי $f\colon Q_8 \to \mathbb{Z}_8$ הומומורפיזם של חבורות.

1. הוכיחו כי f איננו על, ולכן $|\mathrm{Im}f| \neq 8$.
2. מצאו f כזה שיקיים $|\mathrm{Im}f| = 2$.
3. (רשות) הראו כי לא יכול להיות $|\mathrm{Im}f| = 4$.

שאלה 8

1. נביט ב־$G = (\mathbb{C}^*, \cdot)$. נסמן פונקציה $f\colon G \to G$ המוגדרת על ידי $f(x) = x^4$. זו העתקה מוגדרת היטב, כי לכל $x \in G$ קיים $y \in \mathbb{C}$ אחד ויחיד כך ש־$f(x) = y$, וכן $y \neq 0$. לכן ניתן לקבוע כי $y \in G$. הוכיחו כי f אפימורפיזם.
2. מצאו חבורה G ותח"נ לא טריוויאלית $G \lhd H \neq \{e\}$ שלה, המקיימות $G/H \cong G$.

רמז היעזרו בסעיף 1.