83-110 אלגברה לינארית להנדסה – מועד א' תשפ"ב – 27/01/22

מרצים: דר' אליהו מצרי, דר' ארז שיינר

אורך המבחן: 3 שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט בלבד.

הוראות:

יש לענות על **כל** 5 השאלות, יש לנמק ולהוכיח היטב כל טענה.

מומלץ לקרוא ראשית את כל השאלות, הן <u>לא</u> מסודרות לפי רמת קושי

יש לכתוב את התשובה לכל שאלה על טופס המבחן, מיד לאחר השאלה.

כל שאלה שווה 22 נק' סה"כ הניקוד המקסימלי 110 נק' (כל ציון מעל 100 יעוגל ל100).

1. תהיינה מטריצות $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}$ (עם m שורות וn עמודות).

<u>הוכיחו או הפריכו</u> את הטענות הבאות:

א. אם בA יש שורת אפסים, אזי $\dim C(A) < n$.

הפרכה:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dim C(A) = 2$$

ב. A^tB הפיכה אם ורק אם AB^t הפיכה.

הפרכה:

$$A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$AB^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

קל לראות כי $A^tB = I_2$ הפיכה, ואילו AB^t אינה הפיכה (יש לה שורת אפסים אפילו).

ג. $R(A) = N(B)$ אם ורק אם $BA^t = 0$.

הפרכה:

נבחר $B = 0$ ולכן $N(B) = \mathbb{R}^n$, ובוודאי $BA^t = 0$.

נבחר $A = 0$ ולכן $R(A) = \{0\} \neq N(B)$.

זכרו:

$R(A)$ הוא מרחב השורות של המטריצה A,

$C(A)$ הוא מרחב העמודות של המטריצה A,

$N(A)$ הוא מרחב האפס של המטריצה A (כלומר מרחב הפתרונות של המערכת ההומוגנית המתאימה).

2. תהי מטריצה ריבועית $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

א. יהיו שני ערכים עצמיים שונים $\lambda_1 \neq \lambda_2$ של A עם ו"ע מתאימים v_1, v_2.

הוכיחו שאם $a \cdot b \neq 0$ אז $u = av_1 + bv_2$ <u>אינו</u> ו"ע של A.

נב"ש כי u הינו ו"ע של A, לכן קיים λ_3 כך ש

$$Au = \lambda_3 u$$

כלומר

$$A(av_1 + bv_2) = \lambda_3(av_1 + bv_2)$$

לכן

$$a\lambda_1 v_1 + b\lambda_2 v_2 = a\lambda_3 v_1 + b\lambda_3 v_2$$

$$a(\lambda_1 - \lambda_3)v_1 + b(\lambda_2 - \lambda_3)v_2 = 0$$

כיוון שו"ע של ע"ע שונים הם בת"ל, נובע כי

$$a(\lambda_1 - \lambda_3) = 0$$

$$b(\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

כיוון ש $a, b \neq 0$ נובע כי $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ בסתירה.

ב. הוכיחו כי λ הוא ע"ע של המטריצה A אם ורק אם אפס הוא ע"ע של $A - \lambda I$.

אכן, λ ע"ע של A אם ורק אם $\det(A - \lambda I) = 0$ לפי מה שלמדנו בכיתה

כמו כן, אפס הוא ע"ע של $A - \lambda I$ אם ורק אם $\det\big((A - \lambda I) - 0 \cdot I\big) = 0$

וקיבלנו בדיוק את אותו התנאי.

ג. יהי λ ע"ע של A ויהי $c \in \mathbb{R}$. הוכיחו או הפריכו: $c\lambda$ הוא ע"ע של cA.

הוכחה:

קיים $v \neq 0$ כך ש

$$Av = \lambda v$$

לכן

$$(cA)v = cAv = c\lambda v = (c\lambda)v$$

ואכן $c\lambda$ הוא ע"ע של cA.

3. נביט בתתי המרחב של $\mathbb{R}^3$ עם המכפלה הפנימית הסטנדרטית והנורמה המושרית.

$$U=\{(x,y,z)|2x+y-z=0\}$$

$$W=span\{(1,0,1),(0,1,0),(1,-1,1)\}$$

א. מצאו בסיסים אורתונורמליים ל-U,W.

נתחיל בלמצוא בסיסים, ולאחר מכן נפעיל את אלגוריתם גרם שמידט.

עבור U

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$y=t,z=s$$

$$x=-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s$$

הפתרון הכללי הוא

$$\left(-\frac{1}{2}t+\frac{1}{2}s,t,s\right)=t\left(-\frac{1}{2},1,0\right)+s\left(\frac{1}{2},0,1\right)$$

אפשר לכפול את וקטורי הכיוון ב2 ולקבל בסיס נוח:

$$U=span\{(-1,2,0),(1,0,2)\}$$

נפעיל גרם שמידט

$$w_1=(-1,2,0)$$

$$w_2=(1,0,2)-\frac{\langle(1,0,2),(-1,2,0)\rangle}{\langle(-1,2,0),(-1,2,0)\rangle}(-1,2,0)=(1,0,2)-\frac{-1}{5}(-1,2,0)=\left(\frac{4}{5},\frac{2}{5},2\right)$$

נכפול ב-$\frac{5}{2}$ על מנת לקבל וקטור נוח יותר באותו כיוון. לכן נקבל בסיס א"ג

$$\{(-1,2,0),(2,1,5)\}$$

ננרמל את שני הוקטורים על מנת לקבל בסיס א"נ לU

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0),\frac{1}{\sqrt{30}}(2,1,5)\right\}$$

כעת נעבור לW, ננפה וקטורים מיותרים:

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

לכן בסיס לW מורכב משני הוקטורים הראשונים

$$W=span\{(1,0,1),(0,1,0)\}$$

שהם כבר מאונכים (הידד). ננרמל ונקבל בסיס א"נ לW:

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1),(0,1,0)\right\}$$

ב. מצאו בסיס ל-$U \cap W$.

נעביר את W לצורה אלגברית

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \\ 1 & 0 & | & z \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & x \\ 0 & 1 & | & y \\ 0 & 0 & | & z-x \end{pmatrix}$$

כלומר

$$W = \{(x,y,z) | x = z\}$$

לכן

$$U \cap W = \left\{ (x,y,z) \middle| \begin{matrix} 2x+y-z=0 \\ x-z=0 \end{matrix} \right\}$$

נמצא את הפתרון הכללי של המערכת

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z = t$$

$$x = t, y = -t$$

$$(t,-t,t) = t(1,-1,1)$$

ולכן

$$U \cap W = span\{(1,-1,1)\}$$

ג. מצאו בסיס אורתונורמלי ל-$\mathbb{R}^3$ המכיל בסיס אורתונורמלי ל-U.

ראשית נשלים את הבסיס הא"ג הנוח שמצאנו ל-U בסעיף א' לבסיס למרחב כולו.

לאחר מכן נפעיל גרם שמידט, שלא משפיע כמובן על שני הוקטורים הראשונים שכבר מאונכים.

לבסוף, ננרמל.

$$w_1 = (-1,2,0)$$

$$w_2 = (2,1,5)$$

על מנת להשלים לבסיס, נרשום את הוקטורים בעמודות ונוסיף לאחריהן עמודות של בסיס, ונדרג על מנת למצוא את הוקטורים המיותרים:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

לכן הבסיס שמצאנו הוא

$$\{w_1, w_2, (1,0,0)\}$$

כעת נפעיל גרם שמידט על הוקטור החדש

$$w_3 = (1,0,0) - \frac{\langle (1,0,0), (-1,2,0) \rangle}{\langle (-1,2,0), (-1,2,0) \rangle}(-1,2,0) - \frac{\langle (1,0,0), (2,1,5) \rangle}{\langle (2,1,5), (2,1,5) \rangle}(2,1,5) =$$

$$= (1,0,0) - \frac{-1}{5}(-1,2,0) - \frac{2}{30}(2,1,5) = (1,0,0) + \left(-\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0\right) - \left(\frac{2}{15}, \frac{1}{15}, \frac{1}{3}\right) =$$

$$= \left(1 - \frac{3}{15} - \frac{2}{15}, \frac{6}{15} - \frac{1}{15}, -\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$$

נבחר וקטור נוח יותר

$$(2,1,-1)$$

וננרמל סה"כ לקבל

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{5}}(-1,2,0), \frac{1}{\sqrt{30}}(2,1,5), \frac{1}{\sqrt{6}}(2,1,-1)\right\}$$

4. נביט במטריצה המרוכבת $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, כאשר $a \in \mathbb{C}$ פרמטר.

א. חשבו את $\det(A)$, הביעו תשובתכם באמצעות הפרמטר a.

$$\det\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & -a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -a^2 & 1 \\ 1 & a \end{pmatrix} = -a^3 - 1$$

ב. מצאו את כל ערכי $a \in \mathbb{C}$ עבורם המטריצה A הפיכה.

המטריצה הפיכה אם ורק אם $\det A \neq 0$, כלומר $a^3 \neq -1$.

נראה מה הם הפתרונות למשוואה $z^3 = -1$

על מנת לפתור את המשוואה נעבור לצורה קוטבית

$$z^3 = cis(\pi)$$

$$z_k = cis\left(\frac{\pi + 2\pi k}{3}\right), k = 0,1,2$$

כלומר המטריצה הפיכה לכל

$$a \neq cis\left(\frac{\pi}{3}\right), cis(\pi), cis\left(\frac{5}{3}\pi\right)$$

ג. מצאו את כל ערכי $a \in \mathbb{C}$ עבורם $(1,1,1) \notin C(A)$

אנחנו בעצם רוצים למצוא את כל ערכי a עבורם למערכת הבאה אין פתרון.

(אפשר היה לפתור עם סעיף ב', אבל אני מציג פתרון ללא סעיף ב')

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & -a^2 & 1 & 1-a \\ 0 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & -a^2 & 1 & 1-a \end{array}\right) \to$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & a & 1 \\ 0 & 0 & 1+a^3 & 1-a+a^2 \end{array}\right)$$

לא יהיה פתרון אם $a^3 = -1$ וכן $a^2 - a + 1 \neq 0$

נפתור את

$$a^2 - a + 1 = 0$$

$$a_{1,2} = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2}$$

אבל

$$cis\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}$$

$$cis\left(\frac{5\pi}{3}\right) = \frac{1 - i\sqrt{3}}{2}$$

ולכן סה"כ הערך היחיד עבורו לא יהיה פתרון למערכת הוא $a = -1$.

טריק נחמד לפתרון המשוואות:

עבור $a = -1$ ברור כי $a^3 = -1$ וכן $a^2 - a + 1 \neq 0$

אם $a \neq -1$ אך $a^3 + 1 = 0$ נקבל כי

$$a^3 + 1 = (a+1)(a^2 - a + 1)$$

ולכן $a^2 - a + 1 = 0$ ושוב הגענו לכך שרק עבור $a = -1$ אין פתרון למערכת.

5. תהי $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ המוגדרת ע"י

$$T(x, y, z) = (x - y, x + z)$$

א. מצאו מטריצה A כך שלכל $v \in \mathbb{R}^3$ מתקיים כי $Tv = Av$.

A היא המטריצה שעמודותיה הן

$$T(1,0,0), T(0,1,0), T(0,0,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

ב. מצאו בסיס ל-$\ker(T)$.

$$\ker T = N(A)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$z = t$$

$$x = -t, y = -t$$

$$(-t, -t, t)$$

$$\ker T = span\{(-1,-1,1)\}$$

ג. מצאו בסיס ל$Im(T)$.

$$Im(T) = C(A)$$

ולפי החישובים בסעיפים קודמים

$$Im(T) = span\{(1,1),(-1,0)\}$$

הערה: קל לוודא כי בעצם $Im(T) = \mathbb{R}^2$, ואז יכלנו לבחור את הבסיס הסטנדרטי

עדיין הפתרון עם המטריצה נראה לי מהיר יותר.