סדרות נורמליות

הגדרה

תהא G חבורה.

- סדרה נורמלית של G היא סדרה של תתי חבורות $G = G_0 \rhd G_1 \rhd G_2 \rhd ... \rhd G_k = \{e\}$ כאשר לכל i $G_{i+1} \neq G_i$
- אורך הסדרה הוא k
- הגורמים של הסדרה: G_i/G_{i+1}, $0 \leq i < k$

דוגמה

א) לכל חבורה G, $G \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית מאורך 1. הגורם היחיד הוא $G/\{e\}$.

ב) $G = A \times B$, $\bar{A} = \{(a, e) : a \in A\}$, $\bar{B} = \{(e, b) : b \in B\}$ אז $G \rhd \bar{A} \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית מאורך 2, וגם $G \rhd \bar{B} \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית מאורך 2.

- הגורמים של הסדרה הראשונה הם $G/\bar{A} = A \times B/\bar{A} \cong B$ ו$\bar{A}/\{e\} \cong A$
- הגורמים של הסדרה השנייה הם $G/\bar{B} \cong A, \bar{B}/\{e\} \cong B$

ג) $G = \mathbb{Z}_{2p}$, p ראשוני. $\mathbb{Z}_{2p} \rhd \langle 2 \rangle \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית מסדר 2. הגורמים: $\mathbb{Z}_{2p}/\langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}_2$(מדוע?) ו$\langle 2 \rangle/\{e\} \cong \langle 2 \rangle \cong \mathbb{Z}_p$(הערה: $\mathbb{Z}_{2p} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_p$. מדוע?)

ד) $G = S_3$. $S_3 \rhd A_3 \rhd \{e\}$ סדרה מאורך 2. גורמים: $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$, $A_3/\{e\} \cong \mathbb{Z}_3$ - אותם גורמים כמו בדוגמה הקודמת(אם ניקח $p = 3$) - כלומר הגורמים לא נותנים לנו מידע מלא על החבורה.

הגדרה

תהא $G = G_0 \rhd G_1 \rhd ... \rhd G_k$ סדרה נורמלית.

- <u>עידון ממש אלמנטרי</u> של הסדרה הנ"ל היא הוספת תח"נ L בין G_i לG_{i+1}. כלומר סדרה חדשה שהיא

$$G = G_0 \rhd G_1 \rhd ... \rhd G_i \rhd L \rhd G_{i+1} \rhd ... \rhd G_k = \{e\}$$

- <u>עידון ממש</u> מתקבל מסדרה של עידונים אלמנטרים.
- <u>עידון</u> של סדרה נורמלית הוא הסדרה המקורית או עידון ממש שלה.

דוגמה

$G=S_3$, $S_3 \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית.
עידונים שלה:

- $S_3 \rhd \{e\}$ עידון
- $S_3 \rhd A_3 \rhd \{e\}$ עידון ממש

עוד דוגמה

$$G=\mathbb{Z}_{16}$$

$$\mathbb{Z}_{16} \rhd \langle 8\rangle \rhd \{e\}$$

$$\mathbb{Z}_{16} \rhd \langle 4\rangle \rhd \langle 8\rangle \rhd \{e\}$$

$$\mathbb{Z}_{16} \rhd \langle 2\rangle \rhd \langle 4\rangle \rhd \langle 8\rangle \rhd \{e\}$$

הגדרה

סדרת הרכב של G היא סדרה נורמלית של G שאין לה עידון ממש.

משפט

סדרה נורמלית של חבורה G היא סדרת הרכב אם"ם הגורמים חבורות פשוטות.

הוכחה

<u>ט.ע.</u> נניח $G \lhd N$. ${}^{G}/_{N}$ פשוטה אם"ם לא קיימת תח"נ L.

<u>הוכחת ט.ע.</u> <u>כיוון א</u> אם $G \rhd L \rhd N$ אז ${}^{G}/_{N} > {}^{L}/_{N}$. יתר על כן, לפי משפט איז' III ${}^{G}/_{N} \rhd {}^{L}/_{N}$ ולכן ${}^{G}/_{N}$ אינה

<u>כיוון ב</u> אם ${}^{G}/_{N}$ אינה פשוטה, אז קיימת תח"נ לא טריוויאלית $\{e\} \lhd$ ${}^{G}/_{N} \rhd K$

<u>תזכורת</u> האפימורפיזם הקנוני ${}^{G}/_{N}$ $\psi : G \to$ מוגדר ע"י $\psi(g)=gN$

נתבונן ב$\psi^{-1}(K)$ במקרה הנ"ל, כלומר בכל האיברים במחלקות של K.

<u>תרגיל</u> $\psi^{-1}(K)$, ז.א. המקור תחת האפימורפיזם הקנוני של K = כל האיברים מחלקות של K הוא תח"נ של G שמכילה ממש את N.

קיבלנו $G \rhd \psi^{-1}(K) \rhd N$. ■.

דוגמאות לסדרות הרכב

א) $S_3 \rhd A_3 \rhd \{e\}$. הגורמים: $S_3/A_3 \cong \mathbb{Z}_2$ ו$A_3/\{e\} \cong \mathbb{Z}_3$ הם חבורות פשוטות. לכן זו סדרת הרכב.

ב) עבור $5 \leq n$, $S_n \rhd A_n \rhd \{e\}$ סדרה נורמלית. הגורמים הם:

- $S_n/A_n \cong \mathbb{Z}_2$ חבורה פשוטה.
- $A_n/\{e\} \cong A_n$ - עבור $5 \leq n$ זו חבורה פשוטה.

לכן הסדרה הזו סדרת הרכב.

ג) $G = S_4$. $S_4 \rhd A_4 \rhd V_4 \rhd \langle (1,2)(3,4) \rangle \rhd \{e\}$ כאשר V_4 חבורת קליין היא

$$V_4 = \{e, (1,2)(3,4), (1,3)(2,4), (1,4)(2,3)\}$$

טענה: הסדרה הנ"ל היא סדרת הרכב של S_4

הוכחה:

ט.ע.1 V_4 ת"ח של A_4

ט.ע.2 $V_4 \trianglelefteq A_4$

הוכחה: V_4 היא איחוד של מחלקות צמידות בS_4(כי מכילה את כל האיברים שמבנה המחזורים שלהם $(2,2)$ או $(1,1,1,1)$)

עובדה: ת"ח היא נורמלית אם"ם היא איחוד של מחלקות צמידות. ■

ט.ע.3 $\langle (1,2)(3,4) \rangle \lhd V_4$

הוכחה: האינדקס של $\langle (1,2)(3,4) \rangle$ בתוך V_4 הוא 2 ולכן(השלם). ■

הערה: $V_4 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$

עובדה 4: $A_4 \lhd S_4$(הוכחנו בעבר)

מסקנה מט.ע. 1-4 שזו סדרה נורמלית. כדי להראות שזו סדרת הרכב של S_4 מ"ל שכל הגורמים פשוטים.

אכן, $S_4/A_4 \cong \mathbb{Z}_2$, $A_4/V_4 \cong \mathbb{Z}_3$, $V_4/\langle (1,2)(3,4) \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ ו$\langle (1,2)(3,4) \rangle/\{e\} \cong \mathbb{Z}_2$.

■

עוד דוגמה מעניינת

$G = \mathbb{Z}_6$

$$\mathbb{Z}_6 \rhd \langle 3 \rangle \rhd \{0\}$$

$$\mathbb{Z}_6 \rhd \langle 2 \rangle \rhd \{0\}$$

- גורמי הסדרה הראשונה: $\mathbb{Z}_6/\langle 3\rangle \cong \mathbb{Z}_3$, $\langle 3\rangle/\{e\} \cong \mathbb{Z}_2$
- גורמי הסדרה השנייה: $\mathbb{Z}_6/\langle 2\rangle \cong \mathbb{Z}_2$, $\langle 2\rangle/\{0\} \cong \mathbb{Z}_3$

2 סדרות הרכב עם אותם גורמים.