תרגיל כיתה 11

הגדרה

יהי M מודול מעל R.

עבור $a \in M$, $Ra = \{r \cdot a | r \in R\}$ הוא המודול הציקלי הנוצר ע"י a, וזהו תת־מודול של M.

דוגמה 1

$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ מודול מעל $\mathbb{Z}$. ניקח $(1,0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} \cdot (1,0) = \{r \cdot (1,0) | r \in \mathbb{Z}\}$$

דוגמה 2

R^n הוא מודול ציקלי מעל החוג $M_n(R)$. אם קיים $\begin{array}{c} M_n(R) \times R^n \to R^n \\ \downarrow \\ M_n(R) \cdot a = R^n \end{array}$.

נתבונן ב־R^2.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b \\ c+d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = R^2$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cong R^2$$

הגדרה

אם קיימת תת קבוצה $\{a_j\}_{j \in I} \subseteq M$ כך שלכל $m \in M$ קיימים $r_1, \ldots r_n \in R$ כך ש־$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = m$, אז נאמר ש־$M$ נפרש ע"י $\{a_j\}_{j \in I}$, ואם $\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = 0 \Leftarrow r_1 = r_2 = \cdots = r_n = 0$, אזי $\{a_j\}_{j \in I}$ נקרא בסיס ו־M נקרא מודול חופשי.

דוגמאות

1. R חוג, R מודול מעל עצמו - אז R ציקלי.

$$R \times R \to R$$

$$R \cdot 1 = R$$

2. R^n הוא חופשי.

3. ל$\mathbb{Z}_n$ כמודול מעל $\mathbb{Z}$ אין בסיס.
נניח שקיים בסיס. אזי $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$.

טענה

כל מודול נוצר סופית (M_1) הוא תמונה הומומורפית של מודול חופשי (M_2).

הוכחה

נניח שM נוצר סופית. ז"א קיימת $\{a_1, \ldots a_n\}$כך שלכל $b \in M$ קיימים $r_1, \ldots r_n$ כך ש$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = b$.

נסמן $M_2 = R^n$ הנוצר ע"י $\{e_i\}_{i=1}^{n}$. נגדיר הומומורפיזם

$$\varphi : M_2 \to M_1$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right) = \sum_{i=1}^{n} r_i a_i$$

$$M_2/\ker\varphi \cong M_1$$

$$\sum_{i=1}^{n} r_i a_i = b \in M_1$$

$$\varphi\left(\sum_{i=1}^{n} r_i e_i\right) = b$$

הגדרה

1. יהי M מודול מעל R. ויהי $x \in M$.
   נגדיר את המאפס של x:

$$\mathrm{Ann}\left(x\right) = \left\{r \in R | r \cdot x = 0\right\}$$

$$\mathrm{Ann}\left(x\right) \lhd R$$

2. הפיתול של M מוגדר להיות

$$\mathrm{Tor}_R\left(M\right) = \left\{m \in M | \exists_{0 \neq r \in R} r \cdot m = 0\right\}$$

3. אם $\mathrm{Tor}\left(M\right) = M$ נאמר שM מפותל.

דוגמאות

1. $M = \mathbb{Z}_6$, $R = \mathbb{Z}$

$$x \in \mathbb{Z}_6 \qquad 6 \cdot x = 0$$

ולכן $\mathbb{Z}_6$ מפותל.

2. R תחום שלמות, וR מודול מעל עצמו.

$$\mathrm{Tor}_R\left(M\right) = 0$$

טענה

(M מודול מעל R)
יהי R תחום שלמות. $\mathrm{Tor}\left(M\right)$ הוא תת מודול של M.

הוכחה

$x \in \mathrm{Tor}\left(M\right)$. צ"ל ש$r \cdot x \in \mathrm{Tor}\left(M\right)$. מכיוון ש$x \in \mathrm{Tor}\left(M\right)$, ז"א קיים $0 \neq s \in R$ כך ש$sx = 0$. צ"ל

$$\begin{array}{ccc} s \cdot (r \cdot x) & = & 0 \\ \| & & \\ r \cdot \left(\underbrace{s \cdot x}_{=0}\right) & = & 0 \end{array}$$

$$rx \in \mathrm{Tor}\,(M)$$

אם $x, y \in \mathrm{Tor}\,(M)$ אז קיימים $s, s' \in R$ כך ש$sx = s'y = 0$.

נוכיח ש$x - y \in \mathrm{Tor}\,(M)$:

$$ss'\,(x-y) = s'\left(\underbrace{sx}_{=0}\right) - s\left(\underbrace{s'y}_{=0}\right) = 0$$

$$x - y \in \mathrm{Tor}\,(M)$$

טענה

$M/\mathrm{Tor}(M)$ הוא חסר פיתול כמודול מעל R.

הוכחה

צריך להוכיח ש$\mathrm{Tor}\,(M/\mathrm{Tor}(M)) = \{0\}$.

יהי $x + \mathrm{Tor}\,(M) \in M/\mathrm{Tor}(M)$. נניח ש$y \in \mathrm{Tor}\,(M/\mathrm{Tor}(M))$ ונוכיח $y = 0$.

$$y \in \mathrm{Tor}\,(M/\mathrm{Tor}(M))$$

$$\Downarrow$$

$$y \in M/\mathrm{Tor}(M)$$

ז"א קיים $x \in M$ כך ש$y = x + \mathrm{Tor}\,(M)$. מכיוון ש$y \in \mathrm{Tor}\,(M/\mathrm{Tor}(M))$, קיים $y' \neq 0$ כך ש$y' \cdot y = 0$.

$y' = x' + \mathrm{Tor}\,(M)$ כך ש$x' \notin \mathrm{Tor}\,(M)$.

$$y' \in R$$

$$0 = y'\,(x + \mathrm{Tor}\,(M)) = y'x + \mathrm{Tor}\,(M)$$

$$\Downarrow$$

$$y'x \in \mathrm{Tor}\,(M)$$

קיים $r \in R$ כך ש

$$0 = r \cdot (y'x) = y'\,(rx) = \underbrace{(y'x)}_{\neq 0} \cdot x$$

ז"א $x \in \mathrm{Tor}\,(M) \Leftarrow y = 0$.

$$t \in M/\mathrm{Tor}(M)$$

הגדרה

המאפס של M הוא

$$\mathrm{Ann}\left(M\right)=\left\{ r\in R|r\cdot M=0\right\}$$

אם $\mathrm{Ann}\left(M\right)=\left\{ 0\right\}$ אז M נקרא נאמן.

הערה

1. כל מודול חסר פיתול הוא נאמן.
2. ניתן להראות ש$\mathrm{Ann}\left(M\right)\lhd R$.

דוגמה

אם $M=\mathbb{Z}_{n}$, $R=\mathbb{Z}$ $\Leftarrow$ $\mathrm{Ann}\left(\mathbb{Z}_{n}\right)=n\mathbb{Z}$.
נתבונן ב$M=\mathbb{Z}_{3}$, $R=\mathbb{Z}$.

$$\mathrm{Ann}\left(\mathbb{Z}_{6}\right)=\left\{ x\in\mathbb{Z}|x\mathbb{Z}_{6}=0\right\} =6\mathbb{Z}$$

תרגיל

נניח שM מודול מעל R. אזי M הוא מודול מעל $\nicefrac{R}{\mathrm{Ann}\left(M\right)}$.

פתרון

נוכיח סגירות לכפל בסקלר.

$$r'\in\nicefrac{R}{\mathrm{Ann}\left(M\right)}$$

$$m\in M\qquad r'\cdot m\in M$$

$$\left(r+\mathrm{Ann}\left(M\right)\right)\cdot M=r\cdot M$$

$$\begin{array}{c}
r'=r_{1}+\mathrm{Ann}\left(M\right)\\
r'=r_{2}+\mathrm{Ann}\left(M\right)
\end{array}\Rightarrow r_{1}-r_{2}\in\mathrm{Ann}\left(M\right)$$

מצד אחד, $r'\cdot m=r_{1}\cdot m$. מצד שני, $r'\cdot m=r_{2}\cdot m$.

$$r_{1}m=\left(r_{1}+\mathrm{Ann}\left(M\right)\right)\cdot m=$$

$$=\left(r_{2}+\underbrace{r_{1}-r_{2}}_{\in\mathrm{Ann}\left(M\right)}+\mathrm{Ann}\left(M\right)\right)\cdot m=\left(r_{2}+\mathrm{Ann}\left(M\right)\right)\cdot m=r_{2}m$$