<u>תרגיל בית 1 במבוא לתורת החבורות</u>

<u>סמסטר א' תש"ף</u>

<u>תזכורת:</u> אם לאיבר a במונואיד יש הופכי מימין והופכי משמאל, אז הוא הפיך וההופכי שלו יחיד. האיבר ההופכי מסומן כ- a^{-1} (זהו הסימון גם בחבורה כמובן). כשהפעולה היא חיבור ההופכי מסומן בד"כ כ- $-a$.

שאלה 1 (חימום)**.** תהי G חבורה עם איבר יחידה e. יהי $a \in G$ איבר. הוכיחו:

א. אם $aa = a$, אז $a = e$.

ב. אם יש $b \in G$ כך ש-$ab = e$, אז $ba = e$ ו-$b = a^{-1}$.

הערה: במונואיד זה לא בהכרח נכון. מוזמנים לחשוב על דוגמה נגדית.

שאלה 2. ענו עבור כל אחת מן המערכות האלגבריות הבאות: האם היא אגודה, מונואיד, חבורה? הוכיחו קביעתכם.

א. $(\mathbb{Z}, *)$, המספרים השלמים עם הפעולה $a * b = a + b + 2$.

ב. $(\mathbb{N}, \max)$, המספרים הטבעיים עם הפעולה של בחירת המקסימום.

ג. $(2\mathbb{Z}, \cdot)$, המספרים השלמים הזוגיים עם פעולת הכפל הרגילה.

ד. $(\mathbb{R}, *)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a * b = \sqrt{a+b}$.

ה. הקבוצה הבאה ביחס לחיבור מטריצות

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0 \right\}$$

ו. $(A, \cdot)$, הקבוצה מן הסעיף הקודם ביחס לכפל מטריצות.

ז. $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \circ)$, המספרים הממשיים עם הפעולה $a \circ b = a + b + ab$. רמז: קודם הוכיחו שזו פעולה סגורה.

שאלה 3. יהי M מונואיד שבו כל איבר הפיך מימין. הוכיחו או הפריכו: M חבורה.

שאלה 4 (מבוחן). יהי M מונואיד ויהיו $a, b \in M$. הוכיחו שאם האיבר aba הפיך, אז גם a ו-b הפיכים.

שאלה 5. תהי σ תמורה על הקבוצה $\{1,\dots,9\}$ המוגדרת לפי: $\sigma(i) = 10 - i$.

כתבו את σ כטבלה וכמכפלת מחזורים זרים.

בהצלחה!