פתרון תרגיל בית 3 מבוא לחוגים ומודולים
88-212 סמסטר ב' תשפ"א

שאלה 1. יהי R חוג, ויהיו $I,J,K \lhd R$ אידאלים.

א. הוכיחו $(I\cap J)\,(I\cap J)\subseteq IJ\subseteq (I\cap J)$.

ב. הוכיחו $I(J+K)=IJ+IK$.

ג. הוכיחו את המודולריות של סריג האידאלים שהזכרנו בתרגול: אם $I\subseteq K$, אזי $I+(J\cap K)=(I+J)\cap K$.

פתרון.

א. את ההכלה $IJ\subseteq I\cap J$ ראיתם בהרצאה. עבור ההכלה השנייה, אם $x,y\in I\cap J$ אז בפרט $x\in I$ ו-$y\in J$, ולכן $xy\in IJ$. כיוון ש-IJ הוא אידאל, הוא סגור לסכומים סופיים, והטענה נובעת.

ב. $\boxed{\supseteq}$ $(J+K)\subseteq I\,(J+K)$ כי $IJ,IK\subseteq I\,(J+K)$. כיוון שסכום אידאלים הוא האידאל המינימלי המכיל את שניהם, נקבל את ההכלה $IJ+IK\subseteq I\,(J+K)$.
$\boxed{\subseteq}$ יהי $a\in I\,(J+K)$. אז אפשר לכתוב $a=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$ עבור $x_i\in I$ ו-$y_i\in J+K$. לפי הגדרת סכום, לכל $1\leq i\leq n$ אפשר לכתוב $y_i=j_i+k_i$ עבור $j_i\in J$ ו-$k_i\in K$. בסך הכל $a=\sum_{i=1}^{n}x_iy_i=\sum_{i=1}^{n}x_ij_i+\sum_{i=1}^{n}x_ik_i\in IJ+IK$.

ג. $\boxed{\subseteq}$ נשים לב כי $I\subseteq I+J,K$, ולכן $I\subseteq (I+J)\cap K$. בנוסף, $J\cap K\subseteq J\subseteq I+J$ וגם $J\cap K\subseteq K$, ולכן $J\cap K\subseteq (I+J)\cap K$. מהמינימליות של סכום אידאלים, נקבל את ההכלה.
$\boxed{\supseteq}$ יהי $k\in (I+J)\cap K$. אז אפשר לכתוב $k=i+j$ עבור $i\in I$ ו-$j\in J$. לכן $j=k-i\in K$, כלומר $j\in J\cap K$, ולכן $x\in I+(J\cap K)$.

שאלה 2. יהי $R=\mathbb{Z}[x]$, $I=\langle 2,x\rangle$ ו-$J=\langle 3,x\rangle$. הוכיחו כי $\{ij\mid i\in I,j\in J\}$ אינו אידאל של R.

הוכחה. נסמן

$$S=\{f\cdot g\mid f\in I,g\in J\}.$$

האיברים באידאלים I ו-J הם מהצורה $f=2f_1+xf_2\in I$, $g=3g_1+xg_2\in J$. אם נבחר $f=2$, $g=3$, אז $6\in S$. אם נבחר $f=g=x$, אז $x^2\in S$. נוכיח כי $6+x^2\notin S$, ולכן S אינה תת־חבורה חיבורית של החוג, ובפרט לא אידאל. נניח בשלילה כי קיימים $f_1,f_2,g_1,g_2\in\mathbb{Z}[x]$ ממעלה לכל היותר 2, ובלי הגבלת הכלליות f_1,g_1 הם קבועים, כך ש-

$$(2f_1+xf_2)\,(3g_1+xg_2)=6+x^2$$
$$6f_1g_1+(2f_1g_2+3f_2g_1)\,x+f_2g_2x^2=6+x^2$$

אז $f_1 g_1 = 1$ (כי הם קבועים) וגם $f_2 g_2 = 1$ (מדוע המעלה שלהם צריכה להיות אפס?). לכן $f_1 = g_1 = \pm 1$, $f_2 = g_2 = \pm 1$. אבל אז לא יתכן כי

$$2 f_1 g_2 + 3 f_2 g_1 = 0$$

במקרה שלנו מכפלת האידאלים היא $IJ = \langle 6, x \rangle$. נסו להראות כי x אינו יכול להכתב בצורה $x = f \cdot g$ כאשר $f \in I$ ו-$g \in J$. □

שאלה 3. יהי R חוג, ויהי $I \lhd R$ אידאל. ראינו כי $M_n(I) \lhd M_n(R)$. הוכיחו

$$M_n(R)/M_n(I) \cong M_n(R/I)$$

הוכחה. נגדיר $\varphi : M_n(R) \to M_n(R/I)$ לפי $\varphi((a_{ij})) = (a_{ij} + I)$ (כלומר מבצעים מודולו I בכל מרכיב בנפרד). נראה כי φ הומומורפיזם:

$$\begin{aligned}
\varphi((a_{ij}) + (b_{ij})) &= \varphi((a_{ij} + b_{ij})) = (a_{ij} + b_{ij} + I) = (a_{ij} + I) + (b_{ij} + I) = \\
&= \varphi((a_{ij})) + \varphi((b_{ij})) \\
\varphi((a_{ij}) \cdot (b_{ij})) &= \varphi\left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ij} b_{kj} + I\right) = \\
&= \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ij} + I)(b_{kj} + I)\right) = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_{ij} + I)\right)\left(\sum_{k=1}^{n} (b_{ij} + I)\right) = \\
&= \varphi((a_{ij})) \cdot \varphi((b_{ij}))
\end{aligned}$$

וכן $\varphi(I_n) = I_n$ (כאשר I_n מטריצת היחידה).
φ על: לכל מטריצה $(a_{ij} + I) \in M_n(R/I)$ מתקיים $\varphi((a_{ij})) = (a_{ij} + I)$.
$\ker \varphi = M_n(I)$:

$$A \in \ker \varphi \iff \forall 1 \le i, j \le n : \varphi(A)_{ij} = 0 + I \iff \forall 1 \le i, j \le n : a_{ij} \in I$$

מפה הטענה נובעת לפי משפט האיזומורפיזם הראשון. □

שאלה 4. בחוג $R = \mathbb{Z}[x, y]$ נסמן שלושה אידאלים:

$$I_0 = \langle x, y \rangle, \qquad I_1 = \langle x - 1, y - 3 \rangle, \qquad I_2 = \langle x - 2, y - 5 \rangle$$

א. הוכיחו שכל שניים מבין האידאלים הם קו־מקסימליים.

ב. הוכיחו ש-$R/I_1 \cong \mathbb{Z}$ (טענה זו נכונה גם ל-I_0 ול-I_2).

פתרון.

א. I_0 ו-I_1 הם קו-מקסימליים, כי $x - (x - 1) = 1$.
I_1 ו-I_2 הם קו-מקסימליים, כי $(x - 1) - (x - 2) = 1$.
לגבי I_0 ו-I_2: $2 = x - (x - 2) \in I_0 + I_2$. כי $5 = y - (y - 5) \in I_0 + I_2$,
כעת, $1 = 5 - 2 \cdot 2 \in I_0 + I_2$, כי $1 \in I_0 + I_2$.

ב. נגדיר הומומורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}[x, y] \to \mathbb{Z}$ לפי $\varphi(f(x, y)) = f(1, 3)$.

- φ הומומורפיזם: ישירות מכך שהחיבור והכפל בחוג הפולינומים מתאימים לחיבור וכפל בכל נקודה בנפרד.
- φ על: לכל $a \in \mathbb{Z}$, $\varphi(a) = a$ (כלומר אם לוקחים את הפולינום הקבוע a, הצבת $(1,3)$ בו תיתן a). לכן φ על.
- $\ker\varphi = I_1$: בכיוון אחד, מחישוב ישיר רואים $\varphi(x-1) = \varphi(y-3) = 0$. לכן $x-1, y-3 \in \ker\varphi$, כלומר $I_1 = \langle x-1, y-3\rangle \subseteq \ker\varphi$.
בכיוון השני, יהי $f(x,y) \in \ker\varphi$. אם נחשוב על $f(x,y)$ כעל פולינום במשתנה y עם מקדמים ב-$\mathbb{Z}[x]$ (כלומר מזהים את $\mathbb{Z}[x,y] = (\mathbb{Z}[x])[y]$), הפולינום $y-3$ הוא פולינום מתוקן ולכן ניתן לבצע בו חילוק עם שארית. זה מסביר למה אפשר לכתוב $f(x,y) = p(x,y)(y-3) + q(x)$. כעת $q(x)$ הוא פולינום רק במשתנה x, וכיוון ש-$x-1$ מתוקן אפשר לבצע בו חילוק עם שארית ולכתוב $q(x) = g(x)(x-1) + r$ כאשר r קבוע. בסך הכל $f(x,y) = p(x,y)(y-3) + g(x)(x-1) + r$. אבל $f(x,y) \in \ker\varphi$, לכן $\varphi(f) = r = 0$, כלומר $f \in I_1$.

לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, $\mathbb{Z}[x,y]/I_1 \cong \mathbb{Z}$.

שאלה 5. הוכיחו את האיזומורפיזמים הבאים על ידי משפט האיזומורפיזם הראשון (הסבירו כל צעד, כולל בניית ההומומורפיזם וחישוב הגרעין):

א. $\mathbb{Z}[x]/\langle p,x\rangle \cong \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

ב. $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right]/5\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \cong \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$.

פתרון.

א. נגדיר $\varphi : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ לפי $\varphi(f) = f(0) + p\mathbb{Z}$.

- φ הומומורפיזם, כי:

$$\varphi(f+g) = (f(0)+g(0)) + p\mathbb{Z} = (f(0)+p\mathbb{Z}) + (g(0)+p\mathbb{Z}) = \varphi(f) + \varphi(g)$$
$$\varphi(f\cdot g) = (f(0)\cdot g(0)) + p\mathbb{Z} = (f(0)+p\mathbb{Z})\cdot(g(0)+p\mathbb{Z}) = \varphi(f)\cdot\varphi(g)$$
$$\varphi(1) = 1 + p\mathbb{Z}$$

כמו כן φ על כי $\varphi(n) = n + p\mathbb{Z}$.
נטען כי $\ker\varphi = \langle p,x\rangle$. כיוון אחד הוא ברור ($p,x \in \ker\varphi$ כי $\langle p,x\rangle \subseteq \ker\varphi$). נוכיח את ההכלה השנייה. יהי $f \in \ker\varphi$, ונכתוב $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$. מאחר ש-$f \in \ker\varphi$, $a_0 \equiv 0 \pmod p$, כלומר $a_0 = pm$ לאיזשהו $m \in \mathbb{Z}$. אבל אז $f = mp + \left(a_1 + \cdots + a_nx^{n-1}\right)x \in \langle p,x\rangle$, כנדרש.
ממשפט האיזומורפיזם הראשון נקבל את המסקנה.

ב. נרצה להגדיר הומומורפיזם $\varphi : \mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right] \to \mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$. מה הוא יכול להיות? אנחנו יודעים ש-$\varphi(1) = 1$, לכן $\varphi(n) = n$ לכל $n \in \mathbb{Z}$. אם נקבע מהו $\varphi\left(\frac{1}{3}\right)$ נסיים. האיבר הזה צריך לקיים

$$1 = \varphi(1) = \varphi\left(3\cdot\frac{1}{3}\right) = 3\cdot\varphi\left(\frac{1}{3}\right) \pmod 5$$

לכן אין ברירה אלא לבחור $\varphi\left(\frac{1}{3}\right) = 2$. כלומר אם קיים הומומורפיזם φ כזה הוא חייב להיות הפונקציה

$$\varphi\left(\frac{m}{3^n}\right) = \varphi(m)\cdot\varphi\left(\frac{1}{3}\right)^n = m\cdot 2^n + 5\mathbb{Z}.$$

נוודא ש-φ מוגדרת היטב: נניח ש-$\frac{m}{3^n}=\frac{m'}{3^{n'}}$, ובה"כ $n\le n'$. לכן $m'=3^{n'-n}m$. מכאן שמתקיים

$$\varphi\left(\frac{m'}{3^{n'}}\right)=m'\cdot 2^{n'}+5\mathbb{Z}=3^{n'-n}\cdot 2^{n'}\cdot m+5\mathbb{Z}=3^{n'-n}\cdot 2^{n'-n}\cdot 2^n\cdot m+5\mathbb{Z}=$$
$$=6^{n'-n}\cdot 2^n\cdot m+5\mathbb{Z}=2^n\cdot m+5\mathbb{Z}=\varphi\left(\frac{m}{3^n}\right)$$

נוודא שזה אכן הומומורפיזם:

$$\varphi\left(\frac{m}{3^n}+\frac{m'}{3^{n'}}\right)=\varphi\left(\frac{3^{n'}m+3^nm'}{3^{n+n'}}\right)=\left(3^{n'}m+3^nm'\right)2^{n+n'}+5\mathbb{Z}=$$
$$=6^{n'}\cdot 2^n\cdot m+6^n\cdot 2^{n'}\cdot m+5\mathbb{Z}=2^n\cdot m+2^{n'}\cdot m+5\mathbb{Z}=\varphi\left(\frac{m}{3^n}\right)+\varphi\left(\frac{m'}{3^{n'}}\right)$$
$$\varphi\left(\frac{m}{3^n}\cdot\frac{m'}{3^{n'}}\right)=(mm')\,2^{n+n'}+5\mathbb{Z}=(m\cdot 2^n+5\mathbb{Z})\left(m'\cdot 2^{n'}+5\mathbb{Z}\right)=\varphi\left(\frac{m}{3^n}\right)\cdot\varphi\left(\frac{m'}{3^{n'}}\right)$$
$$\varphi(1)=\varphi\left(\frac{1}{3^0}\right)=1\cdot 2^0+5\mathbb{Z}=1+5\mathbb{Z}$$

קל לוודא ש-φ על (כי $\varphi(n)=n+5\mathbb{Z}$). כמו כן,

$$\ker\varphi=\left\{\frac{m}{3^n}\mid m\cdot 2^n\in 5\mathbb{Z}\right\}=\left\{\frac{m}{3^n}\mid m\in 5\mathbb{Z}\right\}=5\mathbb{Z}\left[\frac{1}{3}\right].$$

המסקנה נובעת ממשפט האיזומורפיזם הראשון.

שאלה 6. יהי R חוג.

א. יהיו $I,J\lhd R$ קו־מקסימליים. הוכיחו כי $I\cap J=IJ+JI$.

ב. יהיו $I,J,K\lhd R$ כך ש-I,K קו־מקסימליים וגם J,K קו־מקסימליים. הראו כי גם IJ,K קו־מקסימליים.

ג. הוכיחו באמצעות אינדוקציה על n את משפט השאריות הסיני ל-n אידאלים: יהי R חוג, ויהיו $I_1,\ldots,I_n\lhd R$ אידאלים קו־מקסימליים בזוגות. אזי

$$R/_{I_1\cap\cdots\cap I_n}\cong R/_{I_1}\times\cdots\times R/_{I_n}.$$

הסיקו שעבור חוג חילופי R ואידאלים כנ"ל מתקיים

$$R/_{I_1\cdots I_n}\cong R/_{I_1}\times\cdots\times R/_{I_n}.$$

הוכחה.

א. $\boxed{\supseteq}$ $IJ,JI\subseteq I\cap J$, ולכן $IJ+JI\subseteq I\cap J$.
$\boxed{\subseteq}$ לפי הנתון קיימים $x\in I$ ו-$y\in J$ כך ש-$x+y=1$. יהי $z\in I\cap J$. לכן

$$z=z\cdot 1=z(x+y)=zx+zy.$$

כעת $z\in I\cap J\subseteq I$, לכן $zy\in IJ$, ומצד שני $z\in I\cap J\subseteq J$ ולכן $zx\in JI$. זה מראה $z\in IJ+JI$.

ב. לפי הנתון $I+K=J+K=R$. לכן קיימים $x\in I$, $y\in J$ ו-$z,z'\in K$ כך ש-$x+z=1=y+z'$. לכן $1=(x+z)(y+z')=xy+(xz'+zy+zz')$. לפי ההגדרה $xy\in IJ$, וכיוון ש-K הוא אידאל מתקיים $xz'+zy+zz'\in K$. לכן IJ,K הם קו־מקסימליים.

ג. עבור $n=2$ זהו משפט השאריות הסיני שהוכחתם בהרצאה. נניח כי הטענה נכונה עבור n כלשהו, ונוכיח עבור $n+1$. יהיו $I_1,\ldots,I_{n+1}$ אידאלים קו־מקסימליים בזוגות. אם נשתמש בסעיף הקודם על $I_1,\ldots,I_n$ ביחס ל-I_{n+1}, נקבל ש-$I_1\ldots I_n$ ו-I_{n+1} הם קו־מקסימליים, ובפרט $I_1\cap\cdots\cap I_n$ ו-I_{n+1} הם קו־מקסימליים. לפי משפט השאריות הסיני עבור $n=2$,

$$R/_{I_1\cap\cdots\cap I_{n+1}}=R/_{(I_1\cap\cdots\cap I_n)\cap I_{n+1}}\cong R/_{I_1\cap\cdots\cap I_n}\times R/_{I_{n+1}}$$

ולפי הנחת האינדוקציה נקבל את הדרוש.

□

שאלה 7. מצאו $x\in\mathbb{Z}$ המקיים $x\equiv 2 \pmod 5$, $x\equiv 4 \pmod 7$ ו-$x\equiv 8 \pmod{11}$.

פתרון. נתחיל מלמצוא $y\in\mathbb{Z}$ המקיים $y\equiv 3 \pmod 5$ ו-$y\equiv 4 \pmod 7$. נשים לב כי $3\cdot 5-2\cdot 7=1$, ולכן ה-y המתאים הוא $y=3\cdot 5\cdot 4-2\cdot 7\cdot 2=60-28=32$ (הוא יחיד מודולו 35).

כעת נמצא $x\in\mathbb{Z}$ המקיים $x\equiv 32 \pmod{35}$ ו-$x\equiv 8 \pmod{11}$. נמצא את המקדמים של 1 כצירוף לינארי של 11 ו-35:

$$(35,11)=\{35=3\cdot 11+2\}=(11,2)=\{11=5\cdot 2-1\}=(2,1)=1$$

ולכן

$$1=11-5\cdot 2=11-5\cdot(35-3\cdot 11)=16\cdot 11-5\cdot 35.$$

כלומר ה-x הדרוש הוא

$$x=16\cdot 11\cdot 32-5\cdot 35\cdot 8=4232\equiv 382 \pmod{385}.$$

שאלה 8. יהיו $a_1,\ldots,a_n\in\mathbb{R}$ מספרים שונים, ויהיו $b_1,\ldots,b_n\in\mathbb{R}$. הוכיחו, באמצעות משפט השאריות הסיני, כי קיימת פונקציה רציפה $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ כך ש-$f(a_i)=b_i$ לכל $1\le i\le n$.

(הדרכה: בחוג הפונקציות הרציפות $C(\mathbb{R})$, שהפעולות בו הן חיבור נקודתי ומכפלה נקודתית, הסתכלו על אידאלים מהצורה $I_a=\{f\in C(\mathbb{R})\mid f(a)=0\}$ עבור $a\in\mathbb{R}$.)

הוכחה. בחוג הפונקציות הרציפות $C(\mathbb{R})$ נגדיר לכל $a\in\mathbb{R}$ את הקבוצה

$$I_a=\{f\in C(\mathbb{R})\mid f(a)=0\}.$$

נטען כי כל I_a הוא אידאל. אכן, הוא תת-חוג כי אם $f,g\in I_a$ אז

$$(f-g)(a)=f(a)-g(a)=0$$

ואם $f\in I_a$ ו-$g\in C(\mathbb{R})$ אז

$$(f\cdot g)(a)=f(a)\cdot g(a)=0\cdot g(a)=0$$

(מספיק לבדוק בליעה מצד אחד כי $C(\mathbb{R})$ חוג חילופי).
כעת נטען שעבור $a \neq b$, האידאלים I_a ו-I_b הם קו-מקסימליים. לשם כך מספיק להראות $1 \in I_a + I_b$. ניקח את הפונקציות $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ ו-$g(x) = \frac{x-b}{b-a}$. קל לראות כי $f \in I_a$ ו-$g \in I_b$, ולכן

$$f(x) - g(x) = \frac{x-a}{b-a} - \frac{x-b}{b-a} = 1 \in I_a + I_b$$

מה שמראה שהאידאלים קו-מקסימליים.
כעת נוכל להוכיח את הטענה. יהיו $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ מספרים שונים, ויהיו $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$. לכל $1 \leq i \leq n$ נגדיר $g_i(x) = b_i$. נשים לב כי $f \in C(\mathbb{R})$ מקיימת $f(a_i) = b_i$ לכל $1 \leq i \leq n$ אם ורק אם לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $f - g_i \in I_{a_i}$. כיוון שהאידאלים $I_{a_1}, \ldots, I_{a_n}$ קו-מקסימליים בזוגות, ממשפט השאריות הסיני נקבל כי קיימת פונקציה רציפה f המקיימת $f \equiv g_i \pmod{I_{a_i}}$ לכל $1 \leq i \leq n$, כנדרש. □

שאלה 9. יהי R חוג חילופי. נסמן על ידי N את אוסף האיברים הנילפוטנטיים ב-R (תזכורת: איבר $a \in R$ הוא נילפוטנטי, אם קיים $n \in \mathbb{N}$ שעבורו $a^n = 0$).

א. הוכיחו ש-N הוא אידאל של R.

ב. הוכיחו שב-R/N אין איברים נילפוטנטיים לא טריוויאליים (כלומר שונים מ-0).

ג. תנו דוגמה לחוג לא חילופי שבו N אינו אידאל.

פתרון.

א. N אינו ריק כי $0 \in N$. יהיו $a, b \in N$. אז קיימים $n, m \in \mathbb{N}$ כך ש-$a^n = b^m = 0$. נוסחת הבינום של ניוטון נכונה גם בחוגים חילופיים. לכן

$$(a-b)^{n+m} = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m}{k} a^k b^{n+m-k}$$

אם $k \geq n$, אז $a^k = 0$. אחרת, $k < n$ ולכן $m < n + m - k$, כלומר $b^{n+m-k} = 0$. לכן $a - b \in N$. ברור שאם $r \in R$, אז $ra \in N$ כי $(ra)^n = r^n a^n = 0$.

ב. נניח בשלילה כי $\overline{0} \neq \overline{x} = x + N \in R/N$ הוא נילפוטנטי. אז קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-$\overline{x}^n = \overline{0}$. כלומר

$$N = \overline{0} = \overline{x}^n = (x+N)^n = x^n + N$$

ולכן $x^n \in N$. כלומר x^n הוא נילפוטנטי, ולכן קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש-$(x^n)^k = 0$. לכן $x^{nk} = 0$, ונקבל $x \in N$. אך זו סתירה כי הנחנו $\overline{x} \neq \overline{0} = N$.

ג. נבחר $R = M_2(\mathbb{Q})$, $e_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$, $e_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$. אז $e_{12}^2 = e_{21}^2 = 0$, ולכן הם נילפוטנטיים. אבל לכל $n \in \mathbb{N}$

$$(e_{12} + e_{21})^n = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}^n \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ולכן $e_{12} + e_{21} \notin N$. כלומר N אינו סגור לחיבור, ובפרט אינו אידאל.

בהצלחה!