הסתברות וסטטיסטיקה מתמטית - תרגול 10

$X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת. $?P\left(\sum_{n=1}^{\infty} X_n < \infty\right)$

משפט: (משפט שלושת הטורים של קולמוגורוב)

יהיו $X_1, X_2, \dots$ מ"מ ב"ת. אז $\sum_{n=1}^{\infty} X_n$ מתכנס כ"ת אם ורק אם

קיים $A>0$ כך ששלושת התנאים הבאים מתקיימים (ואז הם

מתקיימים לכל $A>0$):

- $\sum_{n=1}^{\infty} P(|X_n| \geq A)$ מתכנס.
- נגדיר $Y_n = X_n \mathbb{1}_{\{|X_n| \leq A\}}$. אז $\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y_n]$ מתכנס.
- $\sum_{n=1}^{\infty} Var(Y_n)$ מתכנס.

התכנסות מרטינגלים

משפט:

תת-מרטינגל שחסום ב-L^1 $\left(\sup_n \mathbb{E}[|X_n|] < \infty\right)$ מתכנס כמעט תמיד וב-L^1.

מסקנה:

תת-מרטינגל אי-שלילי מתכנס כמעט תמיד וב-L^1.

תרגיל:

יהיו $Y_1, Y_2, \dots$ מ"מ ב"ת $Y_i \sim U(0,2)$. נגדיר $X_n = \prod_{i=1}^{n} Y_i$.

האם קיים הגבול $\lim_{n\to\infty} X_n$? אם כן, מהו?

פתרון:

ראינו לפני שני תרגולים ש-X_n מרטינגל. זה מרטינגל אי-שלילי, ולכן

מתכנס כ"ת וב-L^1.

$$\log X_n = \sum_{i=1}^{n} \log Y_i$$

לפי החוק החזק של המספרים הגדולים,

$$\frac{\log X_n}{n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} \log Y_i}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{a.s} \mathbb{E}[\log Y_1]$$

$$\mathbb{E}[\log Y_1] = \frac{1}{2}\int_0^2 \log y \, dy = \frac{1}{2}\left(y\log y - y\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}(2\log 2 - 2) = \log 2 - 1 < 0$$

לכן $\log X_n = \sum_{i=1}^{n} \log Y_i \xrightarrow[n\to\infty]{} -\infty$. לכן $X_n \longrightarrow 0$.

תרגיל:

הוכיח שהילוך מקרי על $\mathbb{Z}$ הוא נשנה. כלומר, אם מתחילים בנקודה x, הוא יבקר בכל נקודה y בהסתברות 1.

הוכחה:

הילוך מקרי $= S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i + S_0$, $X_i = \begin{cases} 1, & \frac{1}{2} \\ -1, & \frac{1}{2} \end{cases}$.

נניח שאנחנו מתחילים ב- $S_0 = 1$, ושואלים האם נגיע לנקודה 0.

נגדיר $T = T_0 = \min\{n \mid S_n = 0\}$. אז $Z_n = S_{n\wedge T}$ מרטינגל.

Z_n מרטינגל אי-שלילי, לכן מתכנס a.s.

אבל Z_n מקבל ערכים שלמים ומתכנס $\Leftarrow$ Z_n קבוע לבסוף.

הדרך היחידה שלו להיות קבוע זה רק אם הוא מגיע ל-0 $\Leftarrow$ $P(T<\infty)=1$.

$\square$

הגדרה:

$X_n \xrightarrow{L^p} X$ אם $\|X_n - X\|_p = \mathbb{E}\left[|X_n - X|^p\right]^{1/p} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

טענה: (תכונות)

נניח $X_n \xrightarrow{L^p} X$.

א. $\mathbb{E}[|X_n|^p] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}[|X|^p]$.

ב. $X_n \xrightarrow{P} X$.

ג. לכל $1\le q<p$, $X_n \xrightarrow{L^q} X$.

ד. אם $X_n \xrightarrow{a.s.} Y$ אז $X=Y$.

תרגיל:

הראו שהסדרה $X_n=\begin{cases} n^2, & \frac{1}{n} \\ 0, & 1-\frac{1}{n} \end{cases}$ מתכנסת בהסתברות ל-0

אבל לא ב-L^p לאף $p\ge 1$.

פתרון:

$\boxed{X_n \xrightarrow{P} 0}$ לכל $\varepsilon>0$,

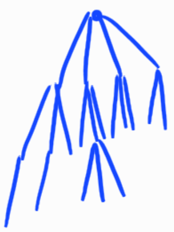
$$\lim_{n\to\infty} P(|X_n|\ge\varepsilon)=\lim_{n\to\infty} P(X_n=n^2)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0.$$

$\boxed{X_n \not\xrightarrow{L^p} 0}$ לכל $p\ge 1$,

$$\mathbb{E}[|X_n|^p]=n^{2p}\cdot\frac{1}{n}+\underbrace{0^p}_{0}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)=n^{2p-1}\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$$

משפט:

מרטינגל שחסום באופן אחיד ב-L^p מתכנס ב-L^p.



הגדרה:

תהליך גלטון ווטסון / תהליך הסתעפות: תהליך סטוכסטי $\{Z_n\}$

כך ש- $Z_0=1$ ובכל דור לכל פרט באוכלוסיה יש כמות

צאצאים לפי התפלגות ידועה אי-שלילית של מספרים טבעיים X באופן בלתי-תלוי

בפרטים האחרים מאותו דור ובדורות הקודמים.

באופן פורמלי: $Z_0=1$ ולכל $n\geq 1$,

$$Z_n = \sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}$$

כשכל $X_i^{(n)}$ עם אותה התפלגות של X והם ב"ת.

הסתברות ההכחדה של Z_n = $\lim_{n\to\infty} P(Z_n=0)$.

שאלה: מתי יש סיכוי חיובי לשרוד?

<u>משפט:</u>

התהליך שורד בסיכוי חיובי $\iff$ $\mathbb{E}[X]>1$ או $X=1$.

<u>הוכחה:</u>

נסמן $M=\mathbb{E}[X]$.

$$\mathbb{E}[Z_n]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}[Z_n|Z_{n-1}]\right]=\mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}\,\Big|\,Z_{n-1}\right]\right]=$$
$$=\mathbb{E}[Z_{n-1}\cdot M]=M\cdot\mathbb{E}[Z_{n-1}]=\dots=M^n$$

$\boxed{M<1}$ במקרה הזה

$$P(Z_n>0)=P(Z_n\geq 1)\underset{\text{מרקוב}}{\leq}\frac{\mathbb{E}[Z_n]}{1}=M^n\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

לכן ההסתברות לשרוד היא 0.

$\boxed{M=1}$ נתבונן ב- $Y_n=\frac{Z_n}{M^n}$. זהו מרטינגל (לכל M), כי

$$\mathbb{E}[Z_n|Z_1,\dots,Z_{n-1}]=\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{Z_{n-1}} X_i^{(n)}\,\Big|\,Z_1,\dots,Z_{n-1}\right]=Z_{n-1}\cdot M(=Z_{n-1})$$

במקרה $M=1$, המרטינגל הוא פשוט Z_n. זה שוב מרטינגל אי-שלילי, אז הוא מתכנס ל- Z_∞. אבל Z_n מרטינגל של מספרים שלמים, אז הוא קבוע לבסוף.

אם $X=1$ - אז תמיד $Z_n=1$.

אחרת, יש סיכוי חיובי להיות 0, לכן כדי שהמרטינגל יהיה קבוע לבסוף הוא חייב להיות קבוע ל-0, כלומר נכחד בהסתברות 1.

$\boxed{M>1}$ אפשר להניח ש- X חסום, ובפרט $M<\infty$. אחרת נחליף את X ב- $X\wedge N$ ל-N מספיק גדול.

שוב $Y_n=\frac{Z_n}{M^n}$ מרטינגל אי-שלילי, לכן הוא מתכנס. נסמן את הגבול Y_∞. נשים לב שמתקיים

$$\{Y_\infty>0\}\subseteq\{\forall n:\ Z_n>0\}$$

כלומר מספיק להראות $P(Y_\infty>0)>0$.

נוכיח ש- $\sup_n \mathbb{E}[Y_n^2]<\infty$. נסמן $\sigma^2=Var(X)$.

$$\mathbb{E}[(Y_n-Y_{n-1})^2\mid Y_1,\dots,Y_{n-1}]=\dots=\frac{1}{M^{2n}}Var\Big(\sum_{i=1}^{Z_{n-1}}X_i^{(n)}\Big)=\frac{1}{M^{2n}}\sigma^2\cdot Z_{n-1}$$

לפי טענה מהתרגול הקודם-קודם,

$$\mathbb{E}[Y_n^2]=\sum_{i=1}^n\underbrace{\mathbb{E}[(Y_i-Y_{i-1})^2]}_{\mathbb{E}\left[\frac{1}{M^{2i}}\sigma^2 Z_{i-1}\right]=\frac{\sigma^2}{M^{i+1}}}+\underbrace{\mathbb{E}[Y_0^2]}_{1}=1+\sum_{i=1}^n\frac{\sigma^2}{M^{i+1}}<\infty$$

זה מראה שהמרטינגל חסום בנורמת L^2 $\Leftarrow$ מתכנס ב- L^2 $\Leftarrow$ מתכנס ב- L^1. בפרט $\mathbb{E}[Y_\infty]=\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[Y_n]=1$, לכן לא יכול להיות ש- $Y_\infty=0$.