הראינו בהרצאה את משפט קוק: $SAT \in NPC$

בעיה

נתון גרף G ורוצים למצוא את הקבוצה הגדולה ביותר של קודקודים שמכילה רק קשת אחת לכל היותר.

הערה

בניגוד לבעיות הקודמות שהיו לנו, כאן זו לא בעיית הכרעה, כי התשובה היא לא כן/לא. זו בעיית אופטימיזציה, אך ניתן להגדיר עבורה בעיית הכרעה מתאימה.

גרסה הכרעה

בהנתן (G,k), רוצים לקבוע האם קיימת קבוצה בגודל k קודקודים(לפחות) שבה לא יותר מקשת אחת.
($Almost-IS$ - בIS דורשים שלא יהיו קשתות כלל).

טענה

$$IS \leq_p Almost-IS$$

הוכחה

בהנתן (G,k) קלט לIS נרצה לבנות קלט (G',k') עבור $Almost-IS$ כך שיתקיים

$$(G,h) \in IS \Leftrightarrow (G',k') \in Almost-Is$$

- אפשרות ראשונה: $G'=G$, $k'=k+1$. לא עובד.
- להוריד את k - גם לא עובד
- להוסיף קודקוד וקשת בינו למישהו שרירותי, ו$k'=k+1$. זה לא עובד כי אנחנו לא יודעים מי נמצא בIS ומי לא, וברגע שבוחרים קודקוד שרירותי עלולים לבחור לא טוב.

הרעיון

נוסיף שני קודקודים חדשים שמחוברים ביניהם.

הבנייה

נסמן $G=(V,E)$ ונקבע $G'=(V',E')$ כאשר

$$V'=V\cup\{u',v'\}$$

$$E'=E\cup\{(u',v')\}$$

ובנוסף $k'=k+2$.

הבניה ניתנת לביצוע בזמן פולינומי(ואפילו לינארי).

נכונות

$(\Rightarrow)$ $(G,k)\in IS$ $\Leftarrow$ יש בG קבוצה ב"ת בגודל k $\Leftarrow$ בתוספת שני הקודקודים החדשים, מתקבלת קב' כמעט ב"ת בגודל k' בG'.

$(\Leftarrow)$ $(G',k')\in Almost-IS$ $\Leftarrow$ יש קבוצה S' כמעט ב"ת של קודקודים.
נחלק למקרים:

1. שני הקודקודים החדשים נמצאים בS':
הקשת היחידה בקבוצה היא ביניהם - לכן ניתן לזרוק את שניהם ולקבל קב' ב"ת בגודל k בG.
2. הקב' S' מכילה רק קודקודים מG:
נזרוק מS' שני קודקודים(אם יש קשת, נזרוק את קצוותיה) ונקבל קב' ב"ת בגודל k בG.
3. S' מכילה בדיוק קודקוד חדש אחד:
נזרוק מS' את הקודקוד החדש, וקודקוד נוסף(אם יש קשת, הקודקוד הנוסף שנזרוק יהיה אחד מקצוותיה)

1. בכל המקרים מתקיים שאכן בG קיימת קב' ב"ת בגודל k ולכן $(G,k)\in AS$

בעיה - Set-Cover

נתונים
1. קבוצת "עולם" U
2. רשימת תת-קבוצות $S_1,S_2,...S_{jn}\subseteq U$
3. מס' k

רוצים לקבוע האם ישנה אפשרות לבחור אוסף T של תת-קבוצות כך ש$|T|\leq k$ ובנוסף לכל $u\in V$ קיימת $S_i\in T$ כך ש$u\in S_i$.

טענה

$$VC\leq_p Set-Cover$$

הוכחה

בהינתן קלט (G,k) ל־VC נרצה לבנות קלט מתאיחם עבור $Set - Cover$

הבנייה

$$U = E$$

לכל קודקוד $v_i \in V(G)$ ניצור קבוצה
$S_i = \{e \in U \big| G$ הוא אחד הקצוות של הקשת שבגרף $v_i\}$
לבסוף, נקבע $k' = k$