המשך מאתמול

$$E=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+U_{eff}(r)$$

$$U_{eff}=\frac{L_z^2}{2mr^2}+U(r)$$

$$E=\frac{1}{2}\mu\left(\frac{dr}{dt}\right)^2+U_{eff}(r)$$

$$\frac{dr}{dt}=\sqrt{\frac{2}{\mu}\left(E-U_{eff}(r)\right)}$$

$$t=\int dt=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}+const$$

$$L_z=\mu r^2\dot{\theta}=\mu r^2\frac{d\theta}{dt}$$

$$d\theta=\frac{L_z}{\mu r^2}dt=\frac{L_z}{\mu r^2}\sqrt{\frac{\mu}{2}}\cdot\frac{dr}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}$$

$$** \quad \theta=\frac{L_z}{\sqrt{2\mu}}\int\frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}(r)}}+const$$

$$* \quad t=\sqrt{\frac{\mu}{2}}\int\frac{dr}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}+const$$

אילוצים על המסלולים האלה שאפשר להסיק:

$$\dot{\theta}=\frac{L_z}{\mu r^2}>0$$

עבור U_{eff} שיוצר תנועה מוגבלת אילו מסלולים אפשריים?

ניקח U_{eff} לדוגמה:

מפני ש $\dot{r}=0$ ב $\{r_{max}, r_{min}\}$ ויש רק תנועה סיבובית.

$$\theta=\frac{L_z}{\sqrt{2\mu}}\int\frac{1}{r^2}\frac{dr}{\sqrt{E-U_{eff}(r)}}+const$$

אם אני יודע את הקשר בין θ ל r אני יכול לדעת ל- $U_{eff}(r)$

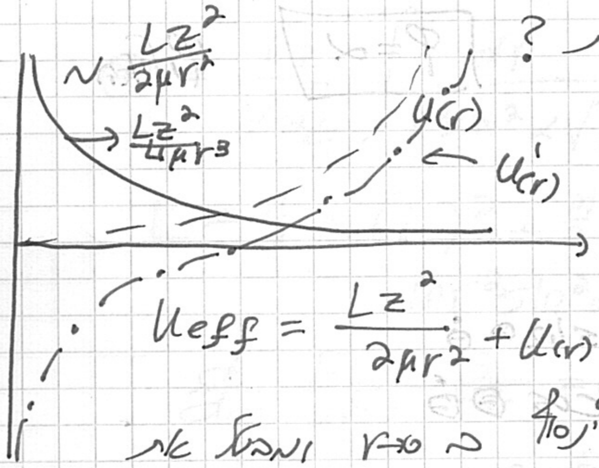
$$\Delta\theta_{r_{min}\to r_{max}} = \frac{L_z}{\sqrt{2\mu}}\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{dr}{r^2\sqrt{E-U_{eff}(r)}}$$

$$E = U_{eff}(r_{min}) = U_{eff}(r_{max})$$

התנאי על מסלול מחזורי: $\Delta\theta = 2\pi\cdot\frac{p}{q}$ $\quad q,p\in\mathbb{N}$.

ועכשיו זה רק לחשב את האינטגרל.

האם קריסה ל $r=0$ אפשרית?



רק כאשר הגל הזה שואף ל(מינוס) אינסוף ב $r\to 0$ ומבטל את $\frac{L_z^2}{4\mu r^2}$ אז נשאף ונקרוס ל $r=0$ [קו נקודה קו].

$$\frac{\mu\dot{r}^2}{2} = E - \left[U(r) + \frac{L_z^2}{2\mu r^2}\right] > 0$$

$$r^2U(r) + \frac{L_z^2}{2\mu} < Er^2$$

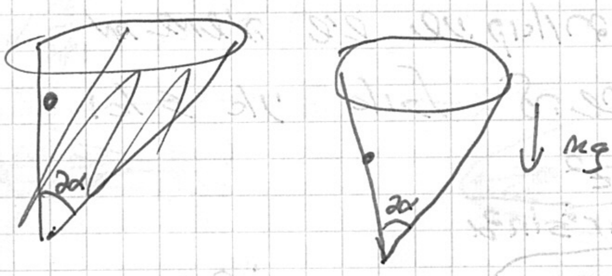
$$r\to 0$$

$$r^2U(r) < -\frac{L_z^2}{2\mu}$$

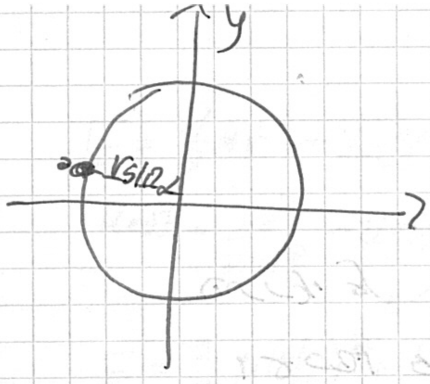
<u>דוגמה:</u> מסה m נעה על גבי חרוט כך שהיא מאולצת לנוע על פניו תחת השפעה של כח כבידה mg.

א. רשמו את הלגרנז'יאן

ב. תארו איכותית את התנועה של המסה.



$$L = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2) - mgz$$



$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{m}{2}(r\sin\alpha\,\dot{\theta})^2-mgr\cos\alpha$$

$$x=r\sin\varphi\cos\theta$$
$$y=r\sin\varphi\sin\theta$$
$$z=r\cos\varphi$$

$$\boxed{\varphi=\alpha}$$ הזוית φ

$$x=r\sin\alpha\cos\theta$$
$$y=r\sin\alpha\sin\theta$$
$$z=r\cos\alpha$$

$$\dot{x}=\dot{r}\sin\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta\,\dot{\theta}$$
$$\dot{y}=\dot{r}\sin\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta\,\dot{\theta}$$
$$\dot{z}=\dot{r}\cos\alpha$$

$$L=\frac{1}{2}m\left([\dot{r}\sin\alpha\cos\theta-r\sin\alpha\sin\theta\,\dot{\theta}]^2+[\dot{r}\sin\alpha\sin\theta+r\sin\alpha\cos\theta\,\dot{\theta}]^2+[\dot{r}\cos\alpha]^2\right)-mgr\cos\alpha$$

$$L=\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{m}{2}(r\sin\alpha\,\dot{\theta})^2-mgr\cos\alpha$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{r}}\right)-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

יש לשים לב שלפי חוקי שימור יש
שימור תנע זויתי.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}\right)-\frac{\partial L}{\partial\theta}=0$$

$\theta \rightarrow$ קואורדינטה ציקלית.

$$\frac{\partial L}{\partial\dot{\theta}}=l_z \leftarrow \text{הקבוע}$$

$$mr^2\sin^2\alpha\,\dot{\theta}=l_z$$

מה שמשמע שיש שני קואורדינטות וקואורדינטה אחת ציקלית.

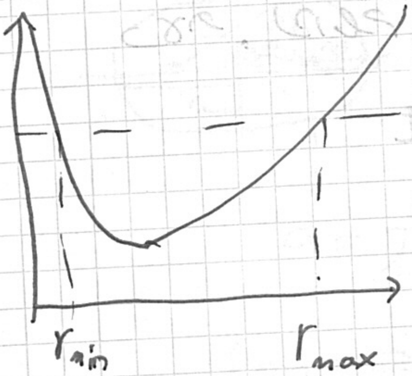
ואז אני אוכל להשתמש ב- U_{eff}

$$U_{eff}=mgr\cos\alpha+\frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}$$

הסבר:

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2+\frac{m}{2}(r\sin\alpha\,\dot{\theta})^2+mgr\cos\alpha$$

$$E=\text{ק.א}+\text{פ.א}\qquad \frac{L_z^2}{2mr^2\sin^2\alpha}+mgr\cos\alpha=U_{eff}$$



$$\frac{dU_{eff}}{dr}=0 \rightarrow$$ נית פתרו אחפ.

וזה יראה כך:

$$\Theta=\frac{l_z}{\sqrt{2Z}}\int\frac{dr}{r^2\sin^2\alpha\sqrt{E-U_{eff}(r)}}$$

$$L=\frac{1}{2}m(\dot r)^2+\frac{m}{2}(r\sin\alpha\dot\Theta)^2-mgr\cos\alpha$$ אפשר גם לפתור עם משוו' אוילר-לגרנז'

$$mr^2\sin^2\alpha\dot\Theta=l_z$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial\dot r}-\frac{\partial L}{\partial r}=0$$

$$m\ddot r-mr\sin^2\alpha\dot\Theta^2+mg\cos\alpha=0$$

$$m\ddot r-mr\sin^2\alpha\left(\frac{L_z}{mr^2\sin^2\alpha}\right)^2+mg\cos\alpha=0$$

$$m\ddot r-\frac{l_z^2}{m\sin^2\alpha}\cdot\frac{1}{r^3}+mg\cos\alpha=0$$

בעיית קפלר:

$$U(r)\sim\frac{\alpha}{r}$$

משיכה $\leftarrow \alpha<0$

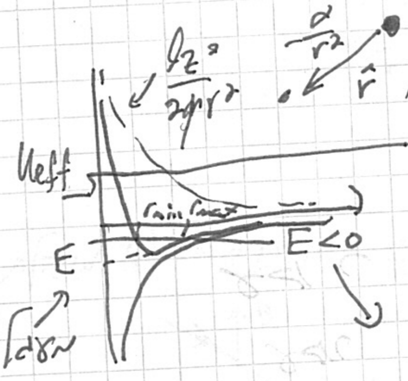
דחייה $\leftarrow \alpha>0$

הרצאה 10:

בעיית קפלר.

$$U(r)=-\frac{\alpha}{r}\quad\alpha>0$$

יש שלושה מקרים:



נכנס ויוצא בורח
נראה כך: