שיעורי בית 7 ־ תתי חבורות נורמליות ומשפט האיזו' הראשון

1. תהא G חבורה ו $H \trianglelefteq G$ תת חבורה נורמלית. הוכיחו/הפריכו
   (א) אם G ציקלית גם G/H ציקלית.
   (ב) אם G/H ציקלית גם G ציקלית.

2. הוכיחו/הפירכו:
   (א) תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ אזי $N \cap K \trianglelefteq G$.
   (ב) תהא G חבורה ו $N, K \leq G$ כך ש $K \trianglelefteq G$ וגם $N \trianglelefteq K$ אזי $K \trianglelefteq G$.

3. תהא G חבורה ו $N, K \trianglelefteq G$ שתי תתי חבורה נורמליות המקיימות $N \cap K = \{e\}$. הוכיחו כי

$$\forall x \in N, y \in K : \ xy = yx$$

[הדרכה: התבוננו ב $x^{-1}y^{-1}xy$]

4. תהי G חבורה, $C(G)$ הוא מרכז החבורה. הוכיחו: $C(G) \trianglelefteq G$.

5. נתון: $H_2 \trianglelefteq G_2$ וגם $H_1 \trianglelefteq G_1$. הוכיחו:
   (א) $(H_1 \times H_2) \trianglelefteq (G_1 \times G_2)$
   (ב) $(G_1 \times G_2)/(H_1 \times H_2) \cong (G_1/H_1) \times (G_2/H_2)$

6. תהא G חבורה חילופית. נגדיר $D = \{(g,g) \ : \ g \in G\} \subseteq G \times G$. הוכיחו כי זוהי תת חבורה נומאלית של $G \times G$ והראו כי

$$G \times G / D \cong G$$

7. תהא G_1, G_2 שתי חבורות סופיות עם סדרים זרים (כלומר $\gcd(|G_1|, |G_2|) = 1$).
הוכיחו כי קיים הומו' אחד $\phi : G_1 \to G_2$ [רמז: חישבו על התמונה $\phi(G_1)$]

8. יהא $n \in \mathbb{Z}$ נסמן $H = \langle (n, n, n, n) \rangle \le \mathbb{Z}^4$. הוכיחו כי $\left[\mathbb{Z}^4/H\right] \cong \left[\mathbb{Z}^3 \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right]$ ($\mathbb{Z}^4$ חילופית, ולכן כל תת־חבורה נורמאלית).