אנליזה מודרנית 1 תרגול 14

23 בפברואר 2015

הערות:

1. אם f פונקצית ליפשיץ אזי f בעלת השתנות חסומה.
2. אם f גזירה והנגזרת שלה בעלת השתנות חסומה אזי f היא ליפשיץ ולכן בעלת השתנות חסומה.

$(\mathbb{R}, S, m)$

תרגיל:

תהי $E \in S$ קבוצה כך ש $m(E) = 0$. הראו כי קיימת פונקציה $f \in V(\mathbb{R})$ המקיימת $\forall x \in E, f'(x) = \infty$. (ראינו שלכל פונקציה מונוטונית קיימת נגזרת כב"מ ולכן גם לf כהפרש של כאלו).

הוכחה:

E מדידה ולכן אפשר למצוא קבוצה E_n כך ש: $E_n \subseteq E$ וכן $m(E_n) - m(E) = m(E_n - E) < \frac{1}{2^n}$. נגדיר

$$f_n(x) := \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{E_n}(t)\, dt$$

אזי f_n גזירה כב"מ (רציפה בהחלט) וכן:

$$f_n(x) = \int_{-\infty}^{x} \mathbb{1}_{E_n}(t)\, dt = m(E_n \cap [-\infty, x]) < \frac{1}{2^n}$$

נגדיר

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} \underbrace{\mathbb{1}_{E_n}(t)}_{:=h_n(t)}\, dt \le \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = 1 < \infty$$

אבל לפי ההתכנסות המונוטונית (גירסת הטור) $(h_n \ge 0)$ מתקיים

$$\infty > \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{x} h_n(t)\, dt = \int_{-\infty}^{x} \sum_{n=1}^{\infty} h_n(t)\, dt$$

קיבלנו

$$L^{1}\left(\mathbb{R}\right)\ni h\left(x\right):=\sum_{n=1}^{\infty}h_{n}\left(x\right)$$

סופית כב"מ ו־$f\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}h\left(t\right)dt$. לכן בעצם $f\in V\left(\mathbb{R}\right)\Leftarrow f\in AC\left(\mathbb{R}\right)$ ומתקיים

$$\begin{aligned}\forall n\quad f_{n}'\left(x\right) & \overset{a.e}{=}h_{n}\left(x\right)\\ f'\left(x\right) & \overset{a.e}{=}h\left(x\right)\end{aligned}$$

כעת, לכל $x\in E$, $x\in E_{n}$ לכל n, E_{n}פתוחה לכן f_{n} גזירה ב־x לכל n

$$\begin{aligned}f_{n}'\left(x\right) & = & h_{n}\left(x\right)=1\\ \Rightarrow f'\left(x\right) & = & \sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{1}_{E_{n}}\left(x\right)=\infty\end{aligned}$$

פונקציות רציפות בהחלט

תזכורת:

תכונות:

1. אם $f\in AC$ אז היא בודאי רציפה (ההיפך אינו נכון).
2. כל פונקציה F מהצורה
$$F\left(x\right)=\int_{a}^{x}f\left(t\right)dt+F\left(a\right)$$
הינה רציפה בהחלט.
3. אם $f\in AC\left(I\right)$ אז $Var_{I}f<\infty$ (ֳהיפך אינו נכון). כמו כן כמסקנה $f'\Leftarrow f\in AC$ קיימת כב"מ.
4. $F\in AC\Leftrightarrow F=\int_{a}^{x}F'\left(x\right)dx+F\left(a\right)$ כלומר ניתן לשחזור את F מהנגזרת שלה.

תרגיל

הוכיחו: אם f ליפשיץ אזי $f\in AC\left(I\right)$.

הוכחה:

אם f היא ליפשיץ אזי קיים M כך שלכל $\left(x,y\right)\subseteq I$.

$$\left|f\left(y\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left|y-x\right|$$

לכל $\epsilon>0$ נמצא $\delta>0$ כך שלכל אוסף של קטעים זרים $\left\{ \left(x_{i},x_{i}'\right)\right\} _{i}$המקיים $\sum_{i}\left|x_{i}'-x_{i}\right|<\delta$.

$$\epsilon\overset{?}{>}\sum_{i=1}^{n}\left|f\left(x_{i}'\right)-f\left(x_{i}\right)\right|\leq\sum_{i=1}^{n}M\left|x_{i}'-x_{i}\right|<M\delta$$

לכן אם נבחר δ להיות $\nicefrac{\epsilon}{M}$ נקבל את הדרוש ו־$f\in AC\left(I\right)$.

הגדרה:

אם $f:I\to\mathbb{R}$, $f\in V\left(I\right)$, $f'\left(x\right)=0$ כב"מ אזי f נקראת פונקציה סינגולרית.

תרגיל:

הראו כי כל פונקציה $V\left(I\right)\ni f:I\to\mathbb{R}$ ניתנת להצגה כבתור סכום של פונקציה סינגולרית $g:I\to\mathbb{R}$ ופו' רציפה בהחלט $h\in AC\left(I\right)$.

הוכחה:

בהרצאה. $\left[0,1\right]$

תרגיל:

מצאו f כך שkfk $f\in AC\left(\left[\epsilon,1\right]\right)$ $\epsilon>0$ וכן f רציפה ב־0 אבל $f\notin AC\left(\left[0,1\right]\right)$.

פתרון:

$$f\left(x\right):=\begin{cases} x\sin\frac{1}{x} & x\neq0\\ 0 & x=0 \end{cases}$$

טענה: f מקיימת את הנדרש.

הסבר:

כי ב$\left[\epsilon,1\right]$

$$f\left(x\right)=\int_{\epsilon}^{x}f'\left(t\right)dt+f\left(\epsilon\right)$$

(ראינו בתרגול הקודם) אבל הראנו ש$f\notin V\left(\left[0,1\right]\right)$ בפרט לא רציפה שם בהחלט.

תרגיל המשך

ואם בנוסף ידוע כי $f\in V\left(\left[0,1\right]\right)\Leftrightarrow Var_{\left[0,1\right]}f<\infty$ האם כעת $\Leftarrow f\in AC\left(\left[0,1\right]\right)$?

תרגיל:

לכל $\epsilon>0$ קיים $E\in\left(0,1\right]$ כך ש: $Var_{\left[0,t\right]}f<\frac{\epsilon}{2}$ (כי Var כאן רציפה ביחס לקבוצה).
כיוון ש־$f\in AC\left(\left[0,1\right]\right)$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $\left\{ \left(x_{i}',x_{i}\right)\right\}$ ב־$\left[t,1\right]$ קטעים זרים כך ש

$$\sum_{i}\left|x_{i}'-x_{i}\right|<\delta$$

מתקיים:

$$\sum_{i}\left|f\left(x_{i}'\right)-f\left(x_{i}\right)\right|<\frac{\epsilon}{2}$$

כעת יהיו $\{(y_i, y_i')\}$ אוסף של קטעים זרים ב־$[0,1]$ כך ש:

$$\sum_i |y_i' - y_i| < \delta$$

אזי

$$\Rightarrow \sum_i |f(y_i') - f(y_i)| \le Var_{[0,t]} f + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

תרגיל:

אם $f \in AC$ אז:

$$f \in Lip(I) \Leftrightarrow |f'| \text{ (a.e) bounded}$$

הוכחה:

$\Leftarrow$אם f ליפשיץ אזי לכל x, y

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} \le M$$

נשאיף את $x \to y$ (החסם נשמר בגבול):

$$|f'(x)| \le M$$

$\Rightarrow$ידוע כי $|f'(x)| \le M$ כב"מ.

$$|f(x) - f(y)| \underset{f \in AC}{=} \left| \int_y^x f'(t)\, dt \right| = \int_y^x M dt = M|x - y|$$

כנדרש.

תרגיל:

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ עולה וסינגולרית $f'(x) \overset{a.e}{=} 0$. הראו ש־M_f סינגולרית. M סינגולית ביחס ל־m, $m \perp \mu$ הקבוצות שנושאות את m, μ זרות. A נושאת את μ ב־I אם לכל $S \subseteq I$ $\mu(S) = \mu(S \cap A)$.

תזכורת:

(Ω, S, μ) מרחב מידה חיובית. נגדיר מידה חדשה

$$\nu(E) := \int_\nu f d\mu, \quad f \in L^1(\mu)$$

מגדירה מידה חדשה עבורה

$$\mu(E)=0\Rightarrow\nu(E)=0$$

ν נקראת מידה רציפה בהחלט ביחס לμ. סימון $\nu\ll\mu$ וכמו כן

$$f=\frac{d\nu}{d\mu}$$

נקראת נגזרת רדון ניקודים של ν ביחס לμ.

משפט רדון ניקודים:

עבור מידות σ סופיות μ,ν כך ש$\nu\ll\mu$ אזי קיימת נגזרת רדון ניקודים יחידה

$$0\leq f=\frac{d\nu}{d\mu}\in J(S)$$

תרגיל:

יהי (Ω,S)מרחב מדיד ותהיינה μ,ν,λ מידות σסופיות המקיימות

$$\mu\ll\lambda,\nu\ll\lambda$$

אזי קיימת נגזרת רדון ניקודים

$$\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$$

ומתקיים כי

$$\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}=\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}$$

פתרון:

ניתן ליישם את משפט רדון ניקודים על היחסים הנ"ל ולקבל שקיימות

$$\begin{aligned}0&\leq f_\mu=\frac{d\mu}{d\lambda}\\0&\leq f_\nu=\frac{d\nu}{d\lambda}\end{aligned}$$

מדידות כלומר

$$\nu(E)=\int_E f_\nu d\lambda,\mu(E)=\int_E f_\mu d\lambda$$

$$(\mu+\nu)(E)=\mu(E)+\nu(E)=\int_E f_\mu d\lambda+\int_E f_\nu d\lambda=\int_E(f_\mu+f_\nu)\,d\lambda=\int_E\left(\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}\right)d\lambda$$

כלומר קיימת $\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}$ ומתקיים

$$\frac{d(\mu+\nu)}{d\lambda}=\frac{d\mu}{d\lambda}+\frac{d\nu}{d\lambda}$$

טענה

יהי (Ω, S)מרחב מידה חיובית σ סופית וסידרת מידות $(\nu_n)_{\mathbb{N}}$ חיוביות סופיות מעל (Ω, S) כך שלכל $n \in \mathbb{N}$ $\nu_n \ll \mu$. נניח כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d\nu_n}{d\mu} \overset{n\to\infty}{\rightarrow} h$$

באשר h מדידה S וכי קיימת $g \in L^1(\mu)$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$.

$$\left|\frac{d\nu_n}{d\mu}\right| \le g$$

כב"מ μ אזי

1. לכל $E \in S$ קיים הגבול $\nu(E) := \lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$.
2. ν מידה חיובית סופית מעל S ו$\nu \ll \mu$.
3. לכל $f \in L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$

$$\forall n, f \in L^1(\nu), f \in L^1(\nu_n)$$

ו־

$$\int_\Omega f d\nu_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega f d\nu$$

הוכחה:

(נסתמך על מה שהוכחנו בעבר שאם $\nu(E) = \int_E h d\mu$ $h \in L^1(\mu)$ אז לכל $f \in L^1(\mu), \int_\Omega f d\nu = \int_\Omega f h d\mu$)

1. $\mu \gg \nu_n$, ν_n חיוביות סופיות μ חיובית σ סופית לכן קיימות $0 \le \frac{d\nu_n}{d\mu} \in L^1(\mu)$ (כב"מ μ) כך שלכל $E \in S$

$$\nu_n(E) = \int_E \frac{d\nu_n}{d\mu} d\mu$$

$$\left|\frac{d\nu_n}{d\mu}\right| \le g \in L^1(\mu), \frac{d\nu_n}{d\mu} \xrightarrow[a.e]{n\to\infty} h$$

$\Leftarrow$לפי משפט ההתכנסות הנשלטת

$$\int_E \frac{d\nu_n}{d\mu} d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_E h d\mu, h \in L^1(\mu)$$

נגדיר

$$\nu(E) = \int_E h d\mu$$

ונקבל

$$\nu(E) = \lim_{n\to\infty} \nu_n(E)$$

2. h אי שלילית (כגבול כב"מ של אי שליליות) לכן ν חיובית . $h \in L^1(\mu)$ לכן ν סופית וכן

$$\mu(E) = 0 \Rightarrow \nu(E) = 0$$

לכן $\nu \ll \mu$.

3. h אי שלילית כב"מ μ ולכן מיחידות הנגזרת רדון ניקודים,

$$\frac{d\nu}{d\mu} = h$$

כב"מ. תהי $f \in L^\infty(\mu) \cap L^1(\mu)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega f d\nu_n &= \int_\Omega f \frac{d\nu_n}{d\mu} d\mu \\ \int_\Omega f d\mu &= \int_\Omega f h d\mu \end{aligned}$$

לכן $fh \overset{a.e\mu}{\longrightarrow} f\frac{d\nu_n}{d\mu}$ מדידה

$$\left| f\frac{d\nu_n}{d\mu} \right| \overset{a.e}{\leq} |f|\, g \leq \|f\|_\infty g < \infty$$

$g \in L^1(\mu)$, $\|f\|_\infty g \in L^1(\mu)$ ולכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת:

$$\begin{aligned} f\frac{d\nu_n}{d\mu}, fh &\to L^1(\mu) \\ \int_\Omega f\frac{d\nu_n}{d\mu} d\mu &\to \int_\Omega fhd\mu \end{aligned}$$

ז"א

$$\int_\Omega f d\nu_n \to \int_\Omega f d\nu$$

כי $h = \frac{d\nu}{d\mu}$

$$\int_\Omega |f|\, d\nu = \int_\Omega |f|\, d\nu = \int_\Omega |f|\, hd\mu < \infty$$

לכן $f \in L^1(\nu)$כנ"ל עבור $f \in L^1(\nu_n)$.

$$\int_\Omega |f|\, d\nu_n = \int_\Omega |f| \frac{d\nu_n}{d\mu} d\mu < \infty \Rightarrow f \in L^1(\nu_n)$$