תרגיל בית 6 – טופולוגיה

<u>שאלה 1</u>

שאלה זו מציגה את הוכחתו הטופולוגית של פרופ' פורסטנברג לקיומם של אינסוף מספרים ראשוניים. **מותר ורצוי להשתמש במה שהוכחנו בתרגול לגבי טופולוגיה זו.**

כזכור, סדרה חשבונית דו צדדית היא קבוצה $S = a + d\mathbb{Z} = \{a + dk | k \in \mathbb{Z}\}$ $(a \in \mathbb{Z}, \quad d \in \mathbb{N})$. נגדיר על $\mathbb{Z}$ את הטופולוגיה הבאה: $O \in \tau$ אם"ם לכל $x \in O$ יש סדרה חשבונית דו צדדית $S = x + d\mathbb{Z}$ כך ש- $x \in S \subseteq O$.

1. הוכיחו כי $\bigcup p\mathbb{Z} = \mathbb{Z} - \{1, -1\}$ (האיחוד הוא על כל המספרים הראשוניים).
2. הוכיחו כי $\mathbb{Z} - \{1, -1\}$ אינה סגורה.
3. הסיקו כי ישנם אינסוף מספרים ראשוניים.

<u>שאלה 2</u>

יהיה X מ"ט. $A \subseteq X$ תת מרחב, אזי $S \subseteq A$ סגורה ב- A $\Leftrightarrow$ קיימת $Q \subseteq X$ סגורה ב- X כך ש- $S = Q \cap A$.

<u>שאלה 3</u>

הוכיחו:

א. כל פונקציה ממרחב טופולוגי דיסקרטי לכל מרחב טופולוגי אחר – הינה רציפה .

ב. כל פונקציה ממרחב טופולוגי כלשהו למרחב הטופולוגי הטריוויאלי - הינה רציפה.

ג. תהי $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_2)$ רציפה. נניח כי $\tau_3 \subseteq \tau_2$ וגם $\tau_1 \subseteq \tau_4$. הוכיחו כי $f : (X, \tau_1) \to (Y, \tau_3)$ וגם $f : (X, \tau_4) \to (Y, \tau_2)$ רציפות.

שאלה 4

תהי $f:X\to Y$ פונקציה בין שני מרחבים טופולוגיים. ניתן לראות את $f\left(X\right)$ כתת מרחב טופולוגי של Y.

א. הוכיחו שאם f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y אזי היא פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f\left(X\right)$.

ב. הראו ע"י שתי דוגמאות נגדיות שמהעובדה ש-f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל-$f\left(X\right)$ לא נובע ש- f פתוחה [סגורה] כפונקציה מ- X ל- Y.

שאלה 5

יהיו $m,c\in\mathbb{R}$ שני מספרים נתונים. נגדיר תת מרחב של $\mathbb{R}^2$:

$X=\left\{\left(x,y\right)\in\mathbb{R}^2 : y=mx+c\right\}$. הוכיחו ש- X הומיאומורפי ל- $\mathbb{R}$.

שאלה 6

יהי $\left(X,\|\ \|\right)$ מרחב נורמי, $a\in X, c\in\mathbb{R}$. הוכיחו שהפונקציות הבאות רציפות:

1. העתקת הנורמה- $f:\left(X,\|\ \|\right)\to\mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x)=\|x\|$ (שני המרחבים הם מרחבים מטריים).
2. הזזה- $g:\left(X,\|\ \|\right)\to\left(X,\|\ \|\right)$ המוגדרת ע"י $g(x)=x+a$.
3. כפל בסקלר- $h:\left(X,\|\ \|\right)\to\left(X,\|\ \|\right)$ המוגדרת ע"י $h(x)=cx$.
4. הסיקו כי כל כדור פתוח $B(a,\varepsilon)$ ($\varepsilon>0,\ a\in X$) הומיאומורפי ל-$B\left(0,1\right)$.

בהצלחה!