אינפי 1 החממה תרגול 10

27 בדצמבר 2020

1 גבולות של פונקציות

תרגילים:

1. הגדירו:

(א) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

$$\forall m < 0 \exists \delta > 0 : |x-a| < \delta \Rightarrow f(x) < m$$

(ב) $\lim_{x\to -\infty} f(x) = a$

$$\forall \epsilon > 0 \exists m < 0 : x < m \Rightarrow |f(x) - a| < \epsilon$$

(ג) $\lim_{x\to \infty} f(x) = -\infty$

$$\forall m < 0 \exists M > 0 : x > M \Rightarrow f(x) < m$$

2. הוכיחו לפי הגדרה:

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{x+5}{2x+3} = \frac{1}{2}$$

פתרון: יהי $\epsilon > 0$, צריך למצוא m כך שלכל $x < m$ נקבל

$$\left| \frac{x+5}{2x+3} - \frac{1}{2} \right| < \epsilon$$

$$\left|\frac{x+5}{2x+3}-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{2x+10-2x-3}{4x+6}\right| = \left|\frac{7}{4x+6}\right|$$

אם $x < \frac{-6}{4}$ אז נקבל:

$$\left|\frac{7}{4x+6}\right| < \epsilon \iff -4x-6 > \frac{7}{\epsilon} \iff x < -1.5 - \frac{7}{4\epsilon}$$

לכן אם נבחר $m = -1.5 - \frac{7}{4\epsilon}$ אז אם $x < m$ אכן נקבל

$$|f(x) - \frac{1}{2}| < \epsilon$$

3. הוכיחו לפי הגדרה:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+1}{(x-1)^2} = \infty$$

פתרון: יהי $M > 0$, צריך למצוא $\delta > 0$ כך שאם $|x-1| < \delta$ אז $M < \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$.

$$|x-1| < \delta \iff (x-1)^2 = |x-1|^2 < \delta^2 \iff \frac{x^2+1}{(x-1)^2} > \frac{x^2+1}{\delta^2} > \frac{1}{\delta^2}$$

אנחנו רוצים $M < \frac{x^2+1}{(x-1)^2}$, אז עבור $\delta = \frac{1}{\sqrt{M}}$ נקבל שאם $|x-1| < \delta$ אז לפי החישוב אכן נקבל:

$$\frac{x^2+1}{(x-1)^2} > \frac{x^2+1}{\delta^2} > \frac{1}{\delta^2} = M$$

4. חשבו $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$. לפי הנוסחא $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$ נקבל:

$$f(x) = \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \frac{x-2}{x-2} \cdot (x^2+2x+4)$$

כעת לפי אריתמטיקה: נשים לב שלכל רכיב במכפלה יש גבול:

$$\lim_{x \to 2} \frac{x-2}{x-2} = 1, \lim_{x \to 2} (x^2+2x+4) = 12$$

ולכן

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \cdot 12 = 12$$

2 גבולות חד צדדיים

הגדרות:

- $\lim_{x\to a^+} f(x) = L$ לפי היינה: לכל סדרה $a < x_n \to a$ מתקיים $f(x_n) \to L$.
- $\lim_{x\to a^-} f(x) = L$ לפי קושי: $\forall\epsilon > 0 \exists\delta > 0 : 0 < a - x < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \epsilon$

משפט:

$$L = \lim_{x\to a} f(x) \iff \lim_{x\to a^+} = \lim_{x\to a^-} = L$$

תרגילים:

1. חשבו גבולות צדדיים והסיקו אם קיים הגבול: $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}, a = 0$.
פתרון:

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^+} x^2 + \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = 0 + \infty = \infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \left(x^2 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to 0^-} x^2 + \lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = 0 - \infty = -\infty$$

קיבלנו גבולות חד צדדיים שונים, ולכן אין גבול ב־0.

3 רציפות

הגדרה: תהי $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. נאמר ש־f רציפה בנק' x_0 אם:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

תרגילים:

1. לאילו ערכים של $a, b \in \mathbb{R}$ הפונקציה

$$f(x) = \begin{cases} -2\sin x & x \le -\frac{\pi}{2} \\ a\sin x + b & -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ \cos x & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

רציפה בכל נק'?
פתרון: בהנחה ש־ $\sin x, \cos x$ רציפות (הוכחתם בהרצאה את $\sin x$, ובהרצאה הבאה

תוכיחו את $\cos x$ כהרכבה של רציפות) אז בתוך התחומים מדובר בכפל וחיבור של רציפות ולכן רציפה. הנקודות הבעייתיות הן $-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$. כדי שהפונקציה תהיה רציפה בהם, נצטרך בתור התחלה שיהיה גבול בנק' אלו. נחשב גבולות חד־צדדיים, ונרצה שיהיו שווים

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x)$$

לכן נחשב:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^-} (-2\sin x) = 2$$

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} a\sin x + b = -a + b$$

ולכן נרצה

$$-a + b = 2$$

לגבי הנק' השנייה:

$$a + b = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} a\sin x + b = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \cos x = 0$$

קיבלנו

$$\begin{cases} -a + b = 2 \\ a + b = 0 \end{cases}$$

ולכן

$$a = -1, b = 1$$

כעת, צריך לוודא שאכן הגבול בנק' אלו זה ערך הפונקציה, ואכן:

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} f(x) = 2 = f(-\frac{\pi}{2}) = -2\sin(-\frac{\pi}{2})$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} f(x) = 0 = f(\frac{\pi}{2}) = \cos\frac{\pi}{2} = 0$$

2. חשבו

$$\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x + \frac{\pi}{2}}$$

הגבול לא קיים כי אם נשאף מימין נקבל $-\infty$: קיימת סביבה של $-\frac{\pi}{2}$ (נניח סביבת $\frac{\pi}{4}$) כך ש־ $-1 \leq \sin x < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ולכן כיון שאנחנו בשאיפה מימין אז $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{1}{x+\frac{\pi}{2}} = \infty$ כי הפונקציה חיובית מימין, והמכנה שואף ל0. ולכן בסה"כ

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^+} \frac{\sin x}{x+\frac{\pi}{2}} = -\infty$$

משמאל נקבל $\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{x+\frac{\pi}{2}} = -\infty$, ולכן בסה"כ

$$\lim_{x \to -\frac{\pi}{2}^-} \frac{\sin x}{x+\frac{\pi}{2}} = \infty$$

גבולות חד צדדיים שונים ולכן אין גבול.

3. תהיינה f, g לא רציפות ב־x_0 הוכיחו או הפריכו:

(א) $f+g$ לא רציפה ב־x_0.

(ב) $f \cdot g$ לא רציפה ב־x_0.

פתרון: א+ב. הפרכה:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & x = 0 \\ 1 & x \neq 0 \end{cases}, g(x) = \begin{cases} 1 & x = 0 \\ -1 & x \neq 0 \end{cases}$$

ואז

$$f(x) + g(x) = 0$$

רציפה כי קבועה

$$f(x) \cdot g(x) = -1$$

רציפה כי קבועה.

4. הוכיחו או הפריכו: אם f לא רציפה ב־x_0, ו־g רציפה אז $f+g$ לא רציפה

פתרון: הוכחה לפי אריתמטיקה: נב"ש ש־ $f+g$ רציפה, אז נקבל

$$f = f + g - g$$

רציפה כסכום רציפות (עד כדי כפל בקבוע -1), ולכן רציפה בסתירה.