אנליזה מתקדמת תרגול 7

3 בדצמבר 2020

1 גזירות של פונקציה מרוכבת

ראיתם בהרצאה את תנאי קושי־רימן לגזירות: פונקציה $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ המוגדרת ע"י $f(x+yi)=U(x,y)+iV(x,y)$ גזירה אמ"ם מתקיים:

$$\begin{cases} U_x = V_y \\ U_y = -V_x \end{cases}$$

ובמקרה זה נקבל שהנגזרת היא:

$$f'(x_0+y_0i)=U_x(x_0,y_0)+iV_x(x_0,y_0)=V_y(x_0,y_0)-iU_y(x_0,y_0)$$

תרגילים:

1. בדקו גזירות, ומצאו את הנגזרת עבור הגזירות:

(א) $f(x+yi)=e^x\operatorname{cis}(y)=e^x\cos y+ie^x\sin y$

פתרון: נמצא U,V:

$$U(x,y)=e^x\cos y$$

$$V(x,y)=e^x\sin y$$

נמצא נגזרות חלקיות ונבדוק את תנאי קושי רימן:

$$U_x=e^x\cos y$$

$$V_y=e^x\cos y$$

$$U_y=-e^x\sin y$$

$$V_x = e^x \sin y$$

אכן מתקיים $U_x = V_y, U_y = -V_x$, ולכן הפונקציה גזירה, ונגזרתה היא:

$$U_x + iV_x = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^x \mathrm{cis} y$$

מה שקורה פה זה שהנגזרת של הפונקציה זו הפונקציה בעצמה, ולכן הגדירו:

$$e^z = e^{x+yi} := e^x \mathrm{cis} y$$

(ב) $f(z) = z + Re(z)$

אפשר להציג לפי U, V ולבדוק את תנאי קושי רימן, אבל נשתמש במקום זה במשהו שראיתם בהרצאה: הפונקציה $Re(z)$ לא גזירה, ומצד שני הפונקציה z גזירה. לכן אם נניח בשלילה ש־ $f(z)$ גזירה ונקבל:

$$Re(z) = f(z) - z$$

ונקבל ש־ $Re(z)$ גזירה כהפרש של גזירות ($f(z), z$ שידוע שהן גזירות), בסתירה לכך שידוע $Re(z)$ לא גזירה.

(ג) דוגמא לסכום של שתי פונקציות לא גזירות שיוצאת פונקציה גזירה: $f(z) = (z + Re(z)) - Re(z) = z$.

(ד) $f(z) = (z-1)\left(Re(z)\right)^2$

פתרון: נבדוק את תנאי קושי רימן:

$$f(x+yi) = (x-1+yi)x^2 = x^3 - x^2 + x^2 yi$$

$$U(x,y) = x^3 - x^2$$

$$V(x,y) = x^2 y$$

נבדוק נגזרות חלקיות:

$$U_x = 3x^2 - 2x$$

$$V_y = x^2$$

כיון ש־ $U_x \neq V_y$ נקבל שהפונקציה לא גזירה.

(ה) $f(x+yi)=e^y\text{cis}x$

פתרון: נקבל:

$$U(x,y)=e^y\cos x$$

$$V(x,y)=e^y\sin x$$

ונגזרות חלקיות:

$$U_x=-e^y\sin x$$

$$V_y=e^y\sin x$$

מקבלים $U_x\neq V_y$ ולכן לא גזירה.

2 פונקציית האקספוננט

כפי שדיברתם בהרצאה, וגם ראינו עכשיו את הפונקציה הזו בתחילת התרגול, מגדירים:

$$e^z=e^{x+yi}:=e^x\text{cis}y$$

תרגיל: חשבו את הערכים הבאים:

1. $e^{17}=e^{17+0i}=e^{17}\text{cis}0=e^{17}$. כלומר: ההגדרה החדשה של הפונקציה המרוכבת משאירה את הפונקציה הממשית במקום.

2. $e^{2i}=e^{0+2i}=e^0\text{cis}2=\text{cis}2$. זה מספר על מעגל היחידה.

3. נשים לב שלכל מספר מדומה טהור $z=yi$ מתקיים: $e^z=e^{0+yi}=e^0\text{cis}y=\text{cis}y$ - מספר על מעגל היחידה.

4. $e^{2-3i}=e^2\text{cis}(-3)$. הרדיוס הוא e^2 הזוית היא -3 ונקבל שזה ברביע השלישי. נשים לב שיש כאן דוגמא לחוקי חזקות:

$$\frac{e^2}{e^{3i}}=\frac{e^2\text{cis}0}{\text{cis}3}=e^2\text{cis}(0-3)=e^2\text{cis}(-3)$$

5. $e^{5+5i}=e^5\text{cis}5=e^5\cdot\underbrace{e^{5i}}_{=\text{cis}5}$.

6. $e^{5+3i}\cdot e^{7-2i}=e^{12+i}=e^{12}\mathrm{cis}1$.

7. הוכיחו: $e^{\overline{z}}=\overline{e^z}$.

פתרון: נלך לפי הגדרה, $z=x+yi$ ונחשב:

$$e^{\overline{z}}=e^{x-yi}=e^x\mathrm{cis}(-y)$$

ראינו ש־ $\overline{r\mathrm{cis}\theta}=r\mathrm{cis}(-\theta)$, ולכן נקבל $e^x\mathrm{cis}(-y)=\overline{e^x\mathrm{cis}y}$, אז נמשיך:

$$=\overline{e^x\mathrm{cis}y}=\overline{e^z}$$

מש"ל.