(1) 05.01.14 [גמיש מודפס]

פונקציונלית

תרגול 11

משפט ההתכנסות הנשלטת:

תהי סדרה של פונקציות מדידות $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת על הקבוצה A לפונ' f.

$\lim f_n = f$ (התכנסות נקודתית) ולכל n מתקיים $|f_n(x)| \le Q(x)$ מדידה ואינטגרבילית

על A, אז f אינטגרבילית על A ומתקיים: $\int_A f_n(x)\,d\mu \to \int_A f(x)\,d\mu$

דוגמה: על משפט ההתכנסות הנשלטת של לבג, חשבו את הגבול:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right) e^{-2x}\,dx$$

פתרון: נשתמש במשפט ההתכנסות הנשלטת עבור $A=[0,\infty)$:

$$f_n(x) = \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} I_{[0,n]}(x) \qquad \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \to e^x\right]$$

נראה ש $f_n(x) \le Q(x)$ כאשר $Q(x) = e^{-x}$

כלומר נראה ש: $e^{-x} \ge \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}$

$$e^x \ge \left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

מהגדרת e^x כ $e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ מספיק שהסדרה $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ מונוטונית עולה במשתנה n:

$\left(\varphi_n(x)\to q,\ q_1<q_2<\dots q_n\right)$

נשתמש באי שוויון הממוצעים:

$$\sqrt[k]{x_1\cdot\ldots\cdot x_k} \le \frac{x_1+\dots+x_k}{k} \qquad x_1\dots x_k>0$$

נשתמש באי שוויון זה עבור $k=n+1$! $x_1=1,\ x_2=1+\frac{x}{n}\ \dots\ x_{n+1}=1+\frac{x}{n}$ ונקבל:

$$\sqrt[n+1]{1\cdot\underbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{n}\right)}_{n\ \text{פעמים}}} \le \frac{1+\overbrace{\left(1+\frac{x}{n}\right)+\dots\left(1+\frac{x}{n}\right)}^{n}}{n+1}$$

כלומר,

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n/n+1} \le \frac{1+n\left(1+\frac{x}{n}\right)}{n+1} = 1+\frac{x}{n+1} \qquad /\ \uparrow^{n+1}$$

$$\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le \left(1+\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \Rightarrow \text{מונוטונית עולה}$$

לכן e^{-x} שולטת בפונקציות f_n והיא אינטגרבילית כי $\int_0^\infty e^{-x}\,dx = -e^{-x}\Big|_0^\infty = 1$

לכן לפי משפט ההתכנסות הנשלטת נקבל:

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^\infty \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} I_{[0,n]}(x)\,dx$$

② 05.01.14

לפי משפט ההתכנסות הנשלטת/המונוטונית פונקציות

$$= \int_0^\infty \lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} I_{[0,n]}(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty e^{x} e^{-2x}\,dx = \int_0^\infty e^{-x}\,dx = 1$$

(עד כאן החומר של אינטגרל לבג)

העתקות לינאריות

תזכורת - אם E_1, E_2 הם מרחבים נורמיים המוגדרים מעל אותו שדה k אז פונ' $L: E_1 \to E_2$ נקראת העתקה לינארית אם לכל $x,y \in E_1$ ו $\alpha,\beta \in k$ מתקיים: $L(\alpha x+\beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$

(בפרט מתקיים $L(0)=0$)

דוגמאות:

• אם נבחר $E_1 = C([0,1])$ ו $E_2 = \mathbb{R}$.
אז ההעתקה $L(f) = \int_0^1 f(x)\,dx$ היא לינארית

פונ' גזירות אינסוף פעמים שרציפות $[0,1]$

• אם נבחר $E_1 = C^\infty([0,1])$ ו $E_2 = C^\infty([0,1])$
אז ההעתקה $L: E_1 \to E_2$, $L(f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$ היא לינארית

הגדרה - אם E_1, E_2 מרחבים נורמיים (לא בהכרח בעלי אותה נורמה) ו $L: E_1 \to E_2$ העתקה לינארית, אז L נקראת רציפה ב $x_0 \in E_1$ אם לכל סדרה $\{x_n\} \subseteq E_1$ המקיימת $\|x_n - x_0\| \to 0$, מתקיים $\|L(x_n) - L(x_0)\| \to 0$ (כאשר n שואף לאינסוף).

אם L רציפה לכל $x_0 \in E_1$, אז L נקראת רציפה

דוגמה: נתבונן שוב במרחב $E = C^\infty([0,1])$ ועל E נגדיר את נורמת הסופרמום
ונגדיר $L: E \to E$ ע"י $L(f)(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x)$

נוכיח ש L לא רציפה בנק' $f=0$.

$C^\infty([0,1])$
$\Downarrow$
$f: [0,1] \to \mathbb{R}$

נתבונן בסדרה $f_n(x) = \frac{x^n}{n}$.

אז $\|f_n\| = \sup_{0\le x\le 1} \left|\frac{x^n}{n}\right| = \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

(3) 05.01.14

שלילת פונקציונל
תרגול ||

ונראה שגם, $\|L(f_n)\| = \left\|\frac{\partial}{\partial x}\frac{x^n}{n}\right\| = \|x^{n-1}\| = \sup_{0\le x\le 1}|x^{n-1}| = 1$

לכן $f_n \to 0$ אבל $L(f_n)\to 0$

<u>הערה:</u> אם העתקה לינארית L רציפה בנקודה $x_0\in E_1$, אז L רציפה בכל E_1.

לכן מספיק להוכיח רציפות בנקודה $x_0=0$

<u>הגדרה:</u> אם קיים $\alpha>0$ כך ש $\|Lx\|\le\alpha\|x\|$ (*) עבור כל $x\in E_1$, או באופן

שקול $\sup_{\|x\|=1}\|Lx\|<\infty$. העתקה לינארית שחסומה

אז L נקראת חסומה.

ואז ה-α המינימלי המקיים את (*) נקרא הנורמה של L.

ומסמנים $\|L\|=\alpha$. כלומר $\|L\|$ הוא המספר המינימלי המקיים לכל $x\in E_1$ $\|Lx\|\le\|L\|\cdot\|x\|$