

פיסיקה למתמטיקאים

מדרגת פוטנציאל

1. נתונה מדרגת פוטנציאל $V(x) = \begin{cases} V_0 & x \leq 0 \\ 0 & x > 0 \end{cases}$ אלומת חלקיקים עם אנרגיה $E > V_0 > 0$ המתוארת ע"י פונקצית גל $\psi(x)$ מגיעה מ $x = -\infty$ ונתקלת במדרגה ב $x = 0$.

(א) רשמו את משוואת שרדינגר בכל המרחב

$$\begin{cases} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V_0 = E\psi & x \leq 0 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' = E\psi & x > 0 \end{cases}$$

(ב) רשמו את הפתרון בכל המרחב

נסמן $k^2 = 2m(E - V_0)/\hbar^2$, $q^2 = 2mE/\hbar^2$ כעת, מדרגת הפוטנציאל תגרום לחלק מהאלומה לחזור שמאלה ולחלק מהאלומה להתקדם ימינה. נשיב לב כי מאחר ו $\psi \notin L^2$ היא אינה ניתנת לנירמול ולכן קיים חופש בבחירת אחד מן המקדמים של פונקצית הגל באזור $x \leq 0$ נרשום אפוא

$$\psi(x) = \begin{cases} e^{ikx} + re^{-ikx} & x \leq 0 \\ te^{iqx} & x > 0 \end{cases}$$

(ג) מצאו את מקדם ההחזרה R ומקדם ההעברה T מרציפות פונקצית הגל והנגזרת שלה ב $x = 0$ נקבל

$$\begin{cases} 1 + r = t \\ k(1 - r) = qt \end{cases}$$

ולכן

$$\begin{aligned} R &= |r|^2 k/k = |r|^2 = (k - q)^2 / (k + q)^2 \\ T &= |t|^2 q/k = 4kq / (k + q)^2 \end{aligned}$$

ומתקיים $R + T = 1$