תרגיל 5

1. עבור האידאלים הבאים קבעו האם הם ראשוניים והאם הם מקסימליים.

(א) $I = \langle 4x+1 \rangle \lhd \mathbb{Z}[x]$.

(ב) $I = \left\langle \overline{x+1} \right\rangle \lhd \mathbb{Z}_3[x] / \left\langle x^4 - 16 \right\rangle$ כאשר בסימון $\overline{x+1}$ הכוונה לתמונה של $x+1$ בהטלה לחוג המנה. רמז: אפשר להשתמש במשפט השאריות הסיני.

פתרון.

i. נסתכל על המנה $mathbbZ\left[x\right] / \left\langle 4x+1 \right\rangle$, ונטען כי היא איזומורפית ל-$\mathbb{Z}\left[\frac{1}{4}\right]$. אכן, נגדיר $\varphi : \mathbb{Z}\left[x\right] \to \mathbb{Z}\left[\frac{1}{4}\right]$ לפי $\varphi\left(f\left(x\right)\right) = f\left(\frac{1}{4}\right)$. זהו אפימורפיזם. נטען כי הגרעין שלו הוא $I = \left\langle 4x+1 \right\rangle$. אכן, אם $f \in \ker\varphi$, אז $f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$. אפריורי, אי אפשר לחלק ב-$4x+1$ בשלמים, כי המקדם המוביל אינו הפיך, אז נבצע חילוק פולינומים ב-$\mathbb{Q}\left[x\right]$: $f\left(x\right) = \left(4x+1\right)g\left(x\right)$ לאיזשהו $g\left(x\right) \in \mathbb{Q}\left[x\right]$. נכתוב $g\left(x\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$, ונטען כי בעצם $g\left(x\right) \in \mathbb{Z}\left[x\right]$. אכן, $f\left(x\right) = g\left(x\right) \cdot \left(4x+1\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(a_i + 4a_{i-1}\right)x^i + 4a_n x^{n+1} \in \mathbb{Z}\left[x\right]$. מהמקדם החופשי נקבל ש-$a_0 \in \mathbb{Z}$; מהמקדם של x נקבל $4a_0 + a_1 \in \mathbb{Z}$, ולכן $a_1 \in \mathbb{Z}$; ובאופן דומה כל $a_i \in \mathbb{Z}$. לכן $f \in I$. לפי משפט האיזומורפיזם הראשון, $\mathbb{Z}[x] / \langle 4x+1 \rangle \cong \mathbb{Z}\left[\frac{1}{4}\right]$. החוג $mathbbZ\left[\frac{1}{4}\right]$ הוא תחום שלמות שאינו שדה, ולכן I אידאל ראשוני שאינו מקסימלי..

ii. נתחיל ממשפט האיזומורפיזם השלישי:

$$\mathbb{Z}_3[x] / \left\langle x^4 - 16 \right\rangle \Big/ \langle x+1 \rangle / \left\langle x^4 - 16 \right\rangle \cong \mathbb{Z}_3\left[x\right] / \left\langle x+1 \right\rangle$$

וכמו שידוע $\mathbb{Z}_3\left[x\right] / \left\langle x+1 \right\rangle \cong \mathbb{Z}_3$. זהו שדה, ולכן האידאל I מקסימלי.

2. תנו דוגמא לחוג קומוטטיבי שיש לו בדיוק n אידיאלים ראשוניים נאותים שונים.
נסתכל על המכפלה של n עותקים של $\mathbb{Q}$. $\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$. מכיוון ש$\mathbb{Q}$ שדה יש לו רק אידיאל ראשוני נאות אחד: $\{0\}$. לכן, מטענה שראינו בתרגול, האידיאלים הראשוניים של $\mathbb{Q} \times \cdots \times \mathbb{Q}$ הם $\{0\}$ באינדקס אחד ו$\mathbb{Q}$ בכל השאר יש בדיוק n כאלה.

3. הוכיחו שחיתוך של שני אידיאלים שאף אחד מהם אינו מוכל בשני, אינו אידיאל ראשוני.
יהיו M_1, M_2 אידיאלים שאף אחד מהם אינו מוכל בשני. בפרט, קיימים $x \in M_1 \setminus M_2$ ו$y \in M_2 \setminus M_1$. כלומר, $xy \notin M_1 \cap M_2$. אבל מכיוון ש$x \in M_1$ וM_1 אידיאל, אז $xy \in M_1$. כמו כן, $y \in M_2$ וM_2 אידיאל, אז $xy \in M_2$. כלומר, $xy \in M_1 \cap M_2$. מכאן ש$M_1 \cap M_2$ אינו ראשוני.

4. הוכיחו שאידיאל ראשוני בחוג קומוטטיבי מכיל את כל האיברים הנילפוטנטיים.
יהי x נלפוטנטי. כלומר, קיים n כך ש ש $x^n = 0$ יהי P אידיאל ראשוני. $0 \in P$, לכן $x^n \in P$. מכאן ניתן להסיק באינדוקציה ש$x \in P$.

5. יהי $f : R \to S$ הומומורפיזם שאינו בהכרח על בין חוגים קומוטטיביים. הויכחו שלכל אידיאל ראשוני $P \trianglelefteq S$, $f^{-1}[P]$ הוא אידיאל ראשוני של R.

נסתכל על ההטלה הטבעית $\pi : S \to S/P$ ונרכיב אותה עם f. נקבל הומומורפיזם $\pi \circ f : R \to S/P$ שהגרעין שלו הוא $f^{-1}[P]$. לפי משפ האיזומורפיזם הראשון $R/f^{-1}[P] \cong Im(\pi \circ f) \leq S/P$.

P ראשוני ולכן S/P הוא תחום שלמות. כל תת חוג של תחום שלמות הוא תחום שלמות, לכן $Im(\pi \circ f)$ הוא תחום שלמות, ומכאן ש$f^{-1}[P]$ ראשוני.