תרגיל בית 10 אלגברה מופשטת 2

מודולים

1. מצאו 2 מבנים שונים של $\mathbb{Z}_{11}$ בתור $\mathbb{Z}[\sqrt{5}]$-מודול.

2. יהי M מודול מעל R/I. הוכיחו כי M הוא גם R-מודול לפי הפעולה $rm := (r + I)m$. הראו גם ש$I \subseteq Ann_R(M)$.

3. יהי M מודול מעל R ויהי $I \lhd R$ אידיאל.

   (א) הוכיחו כי IM הוא תת מודול של M.

   (ב) הוכיחו כי M/IM הוא מודול מעל R/I.

4. יהי M מודול מעל R, הוכיחו או הפריכו ע"י דוגמא נגדית את הטענות הבאות:

   (א) עבור תתי מודולים $N, K, L \leq M$ כך ש $M = N \oplus K$ מתקיים $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

   (ב) עבור תתי מודולים K ו $N \subseteq L$ כך ש $M = N \oplus K$ מתקיים $L = (L \cap N) \oplus (L \cap K)$.

   (ג) עבור תתי מודולים $K \subseteq N$ו L מתקיים $K + (N \cap L) = N \cap (K + L)$.

   (ד) עבור תתי מודולים $K \subseteq N$ ו L, אם $K + L = N + L$ ו $K \cap L = N \cap L$ אז $N = K$.

   (ה) עבור תתי מודולים $N, K, L \leq M$, אם $K + L = N + L$ ו $K \cap L = N \cap L$ אז $N = K$.

5. יהי M R-מודול.
תת מודול $N \leq M$ נקרא תת-מודול גדול של M אם לכל תת מודול $0 \neq N' \leq M$ מתקיים $N \cap N' \neq 0$.
מסמנים זאת ע"י $N \leq_l M$.

(א) הוכיחו עבור תתי מודולים N_1, N_2 כי $N_1, N_2 \leq_l M$ אס"ם $N_1 \cap N_2 \leq_l M$.

(ב) הוכיחו כי $N \leq_l M$ אס"ם לכל $0 \neq a \in M$ קיים $r \in R$ כך ש $ra \neq 0$ ו $ra \in N$.

(ג) בעזרת הלמה של צורן, הראו כי לכל תת מודול $N \leq M$ קיים תת מודול $K \leq M$ כך ש $K \oplus N \leq_l M$.

6. יהי M מודול מעל R ו $N \leq M$ תת מודול. הוכיחו כי אם N ו M/N נוצרים סופית (בתור מודולים מעל R) אז גם M נוצר סופית.
הראו שהכיוון ההפוך אינו נכון ע"י דוגמא נגדית.

7. הראו כי $\mathbb{Q}$ הוא לא חופשי כמודול מעל $\mathbb{Z}$.

8. (בסיס מכל גודל)
יהי V מרחב וקטורי עם בסיס אינסופי בן מנייה $\{e_0, e_2, e_3, \dots\}$.
נתבונן בחוג $R = End(V)$ (אוסף ההעתקות הלינאריות) ונסתכל עליו כמודול מעל עצמו.
עבור n נגדיר את ההעתקות $f_0, f_1, \dots, f_{n-1}$ להיות

$$f_i(e_m) = \begin{cases} 0 & m \pmod n \neq i \\ e_{\frac{m-i}{n}} & m \pmod n = i \end{cases}$$

לכל m טבעי.

למשל עבור 2:
f_0 מקיים $f_0(e_{2k}) = e_k$ ו $f_0(e_{2k-1}) = 0$.
וf_1 מקיים $f_1(e_{2k}) = 0$ ו $f_1(e_{2k-1}) = e_{k-1}$.

הוכיחו כי $\{f_0, \dots, f_{n-1}\}$ הוא בסיס של R כמודול מעל עצמו לכל n.