אינפי 1 – פתרון 12

.1

גזור את הפונקציות הבאות לפי הגדרה:

a. $f(x)=\cos x$

פתרון: $(\cos x)'=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos(x)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\cos x\cos\Delta x-\sin x\sin\Delta x-\cos(x)}{\Delta x}=$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\cos x\frac{(\cos\Delta x-1)}{\Delta x}-\sin x\frac{\sin\Delta x}{\Delta x}=\cos x\cdot 0-\sin x\cdot 1=-\sin x$$

b. $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\in\mathbb{Q}\\ 0 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$ בנקודה 0. [רמז: אפשר לפתור בעזרת היינה] (שימו לב שזו דוגמא לפונקציה שגזירה בנקודה, ואינה רציפה באף מקום פרט לנקודה)

פתרון: $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$. אבל $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\le\left|\frac{x^2}{x}\right|=|x|$ ולכן לכל סדרה $x_n\to 0$ $0\le\left|\frac{f(x_n)}{x_n}\right|\le|x_n|\to 0$ ולכן $\frac{f(x_n)}{x_n}\to 0$ ולכן לפי היינה $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$.

2. גזור את הפונקציות הבאות בעזרת משפטים:

a. $\tan(x)=\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

פתרון: לפי נגזרת של מנה: $tg'(x)=\frac{\cos x\cos x-(-\sin x)\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$

b. $\left(x^3+4\right)^{1000}$

פתרון: ידוע ש $\left(x^{1000}\right)'=1000x^{999}$ ולכן לפי נגזרת של הרכבה, הנגזרת הינה

$$\left[1000\left(x^3+4\right)^{999}\right]\left[3x^2\right]$$

$\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$ .c

פתרון: לפי נגזרת של הרכבה ומנה; $f(x)=\frac{x+1}{x-1}$ ולכן הנגזרת הינה

$f'(x)\frac{1}{2\sqrt{f(x)}}=\left(\sqrt{f(x)}\right)'$, $f'(x)=\frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}$ ולכן סה"כ הנגזרת הינה

$$\frac{-1}{2\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}}\frac{2}{(x-1)^2}=\frac{(x-1)^2\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}=\frac{(x-1)^{\frac{5}{2}}}{\sqrt{x+1}}$$

3. [שאלה ממבחן של פרופסור זלצמן] גזור את הפונקציות הבאות:

$2^{x^e}\cdot e^{x^x}$ .a

פתרון:

$$\left[2^{x^e}\cdot e^{x^x}\right]'=\left[2^{x^e}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}\left[e^{x^x}\right]'=\left[e^{\log 2^{x^e}}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[x^x\right]'=$$

$$=\left[e^{x^e\log 2}\right]'e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}\left[e^{x\log x}\right]'=2^{x^e}ex^{e-1}\log 2\cdot e^{x^x}+2^{x^e}e^{x^x}x^x\left[\log x+1\right]=$$
$$2^{x^e}e^{x^x}\left[ex^{e-1}\log 2+x^x\left[\log x+1\right]\right]$$

$\frac{\tan(e^{x^2})}{\sqrt{(\log x)^2+1}}$ .b

פתרון:

$$\left[\frac{\tan\left(e^{x^2}\right)}{\sqrt{(\log x)^2+1}}\right]'=\frac{\left[\tan\left(e^{x^2}\right)\right]'\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\left[\sqrt{(\log x)^2+1}\right]'}{(\log x)^2+1}=$$

$$\frac{\frac{2xe^{x^2}}{\left[\cos e^{x^2}\right]^2}\sqrt{(\log x)^2+1}-\tan\left(e^{x^2}\right)\frac{2\log x}{2x\sqrt{(\log x)^2+1}}}{(\log x)^2+1}$$

c. $\dfrac{1}{\log(\log(e^{e^x}))}$

פתרון:

$$\frac{1}{\log\left(\log e^{e^x}\right)}=\frac{1}{\log\left(e^x\log e\right)}=\frac{1}{\log\left(e^x\right)}=\frac{1}{x\log\left(e\right)}=\frac{1}{x}$$

$$\left[\frac{1}{x}\right]'=-\frac{1}{x^2}$$

4. תהי $f(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$. אנו יודעים כי יש לפונקציה זו אי רציפות סליקה ב0. האם הפונקציה המתקבלת לאחר סילוק אי הרציפות גזירה באפס? כלומר, האם $g(x)=\begin{cases} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) & x\neq 0 \\ 0 & x=0\end{cases}$ גזירה באפס? (הוכח/הפרך לפי הגדרת הנגזרת)

הפרכה: נראה שלא קיים הגבול $\lim_{x\to 0}\sin\left(\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{x\sin\left(\frac{1}{x}\right)-0}{x-0}=g'(0)$. הגבול הזה לא קיים כי קיימות שתי סדרות $x_n=\frac{1}{\frac{\pi}{2}+2\pi n}, y_n=\frac{1}{-\frac{\pi}{2}+2\pi n}$ שתיהן שואפות לאפס ושונות מאפס אך $f(x_n)\to 1, f(y_n)\to -1$ ולכן לא יכול להיות קיים גבול לפי היינה, ולכן הפונקציה אינה גזירה באפס.

5. נניח f מונוטונית עולה וגזירה בכל הממשיים, הוכח ש $0\le f'$ בכל הממשיים (השתמש בהגדרת הנגזרת, אפשר להשתמש בהיינה ובידע שלנו לגבי סדרות).

הוכחה: $f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ עבור $x>x_0$ מתקיים $f(x)\ge f(x_0)$ כי הפונקציה מונוטונית, ועבור $x<x_0$ מתקיים $f(x)\le f(x_0)$ ולכן תמיד $0\le\frac{f(x_0)-f(x)}{x_0-x}$ ולכן הגבול גם גדול שווה אפס (זה נובע ישירות מהתכונה הדומה עבור סדרות, ומההגדרת הגבול לפי היינה). ולכן $0\le f'$.

6. הוכיחו שלמשוואה $2x=\cos x$ יש פתרון יחיד.

פתרון: נגדיר את הפונקציה $h(x)=2x-\cos x$. פתרון למשוואה הנ"ל הוא כמובן שורש של h. כעת, $h(0)=-1<0$ וגם $h(1)=2-\cos(1)>0$ ולכן לפי משפט ערך הביניים (אינפי 1) חייבת להיות נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $h(c)=0$, כלומר קיים פתרון למשוואה.
נניח בשלילה שיש יותר מפתרון אחד, כלומר קיימים c_1,c_2 כך ש $h(c_1)=h(c_2)=0$. לפי משפט רול קיימת נקודה c_3 כך ש $h'(c_3)=0$ אבל $h'(x)=2+\sin x>0$ בסתירה.

7. תהי f פונקציה גזירה ב- $\mathbb{R}$ המקיימת: $f(1)=0$ ו- $f(x)\neq 0$ לכל $x\in(0,1)$. הוכיחו כי קיימת נקודה $c\in(0,1)$ המקיימת $c=-\frac{f(c)}{f'(c)}$.
(רמז: התבוננו בפונקציה $g(x)=xf(x)$)

פתרון: נשים לב ש $g(0)=g(1)=0$ ולכן לפי משפט רול קיימת נקודה $c\in(0,1)$ כך ש $g'(c)=0$ כלומר $cf'(c)+f(c)=0$ נעביר אגף ונחלק לקבל $c=-\frac{f(c)}{f'(c)}$. (אם $f'(c)=0$ אזי $f(c)=0$ בסתירה לנתון)

8. הוכיחו כי $\tan(x)>x$ בקטע $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

הכוונה הייתה לפתור באמצעות משפט לגרנג', אך למעשה זה לא אפשרי. יש פתרון בשיטה הגיאומטרית שראיתם בכיתה, אך לא לזה הייתה הכוונה. לכן, אפשר להתעלם מהשאלה.

9. א. תהי f פונקציה גזירה ב-(a,b) (כולל האופציה של קרנות) כך ש- $f'(x)=0$ לכל x בקטע. הוכיחו כי f קבועה.
ב. תהי f פונקציה ממשית כלשהי המוגדרת על כל $\mathbb{R}$. נניח שקיימים $\alpha>1,\ M\geq 0$ כך ש- $|f(x)-f(y)|\leq M|x-y|^{\alpha}$. הוכיחו ש- f קבועה.

א. נניח בשלילה שקיימות נקודות $x,y\in(a,b)$ כך ש- $f(x)\neq f(y)$ ובלי הגבלת הכלליות $x<y$. f גזירה בקטע $[x,y]$ ולכן על פי משפט לגרנג' קיימת $c\in(x,y)$ כך ש- $f'(c)=\frac{f(y)-f(x)}{y-x}$ ולפי ההנחה יוצא ש- $f'(c)\neq 0$. סתירה.

ב. נציב $x=x_0$, $y=x_0+h$ עבור $h\neq 0$. כעת מתקיים:

$|f(x_0+h)-f(x_0)|\le M|h|^{\alpha}$. כמו כן מתקיים

$$\frac{|f(x_0+h)-f(x_0)|}{|h|}\le M|h|^{\alpha-1}$$ ומכאן

$$0\le\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|\le M|h|^{\alpha-1}$$. $\alpha>1$ ולכן $\alpha-1>0$. מתקיים

$M|h|^{\alpha-1}\xrightarrow{h\to 0}0$ ולכן לפי משפט הסנדוויץ', נקבל

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\right|=0$$ ומכאן $$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}=0.$$

כלומר, $f'(x_0)=0$ ומכיוון ש-x_0 הייתה נקודה כלשהי, רואים שהנגזרת היא אפס זהותית בקטע, ולפי סעיף א', הפונקציה קבועה בקטע זה.